ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Решение задач и примеров в применении функции «антье»

Зейналлы Субхия Мамедовна, кандидат математических наук, доцент
Гянджинский Государственный Университет, г. Гянджа

Аннотация. *Наше исследование состоит в доказательстве того, что функция «антье» - тема целой и дробной части числа - находит свое применение в заданиях, имеющих практическую направленность.*

Ключевые слова: *функция, значение, число, выражение, задача, степень, уравнение, промежуток, целое число, нуль.*

Уже более двухсот лет используется термин антье (фр. entier), предложенный Лежандром в 1798 г. Новое понятие понадобилось ему при выводе формулы количества вхождений простого числа p в каноническое разложение числа $n!$. Обозначение антье числа x в виде $[x]$ ввел Гаусс 1808 г. В математике, целая часть вещественного числа-округление до ближайщего целого в меньшую сторону.Эта функция называется целой частью от x или антье от x. Функция $y=\left[x\right]$ (читается « y равно антье x»).

Например: [2,3]=2; [0,2]=2; [-1,5]=-2; [$\sqrt{2}$]=1

По определению $[x]\le x<[x]+1$.Если $[x]=m$, то $m\le x< m+1$.

Кроме целой части от x, иногда рассматривается также дробная часть от x,обозначаемая через $\{x\}$, т.е. $\{x\}=x-[x]$.Следовательно, $x=[x]+\{x\}$, или $x=[x]+\theta$ <1.

Примеры: {2,3}=0,3; {0,2}=0,2; {-1,5}=0,5; { $\sqrt{2}$ }=0,41…

Отметим некоторые необходимые для дальнейшего свойства функции «антье».

Свойство 1. $[x+n]=[x]+n$, n-целое число.

Доказательство.Известно, что $x=[x]+\{x\}$, следовательно $[n+x]=[n+[x]+\{x\}]$.Таким образом, $[n+x]=[n+[x]$.

Свойство 2. $[x+y]\ge[x]+[y]$.

Доказательство. $x=[x]+\{x\}$;

$y=[y]+\{y\}$;

$x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\}$;

$[x+y]=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}]$.

Так как $[x]+[y]$-целое число, то на основании свойства 1 имеем

$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$.

По определению $0\le\{x\}<1$,

$0\le\{y\}<1$, и, следовательно,

$0\le\{x\}+\{y\}<2$,

Откуда видим, что возможными значениями для $[\{x\}+\{y\}]$ будут 0 или 1, поэтому $[x+y]\ge[x]+[y]$, что и требовалось доказать.

Доказательство. $x=[x]+\{x\}$; $nx=n[x]+n\{x\}$; $[nx]=[x[x]+n\{x\}]$.

Так как $n[x]$- целое число, то на основании свойства 1 $[nx]=n[x]+[n\{x\}]$.

По определению $0\le\{x\}<1$ и тогда $0\le n\{x\}<n$.

Отсюда возможными значениями для $[n\{x\}]$ будут:0,1,2,3,4,.., $(n-1)$.

Следоватедно, $[nx]\ge n[x]$.

Рассмотрим приложения функции «антье» к теории чисел.

Задача 1.*Сколко в ряду чисел1,2,3,4,…,n имеется чисел, делящихся на k<n?*

Решение.Случай 1. $n=tk$.Данный ряд чисел запишем так:1,2,3,… k, $k+1$,… $k+1$,…,$2k$,$2k+1$,…,$3k$,… tk.

Очевидно, что среди чисел 1,2,3,… n,кратных числу k, будет t чисел: k, $2k$,$3k$,….., tk.

Например, среди чисел 1,2,3,4,…60 имеется $\frac{60}{15}=4$ числа, кратных 15, а именно:15, а именно:15,30,45,60.

Случай 2. $n\neq tk$(т.е. n не делится на k); тогда

$tk<n<(t+1)=k$ (1)

Например, для ряда чисел 1,2,3,…61 и k=15 имеем 4·15<61<(4+1)15.

Из (1) следует: $t<\frac{n}{k}<t+1$, и поэтому чисел, кратных k, будет $t=\left[\frac{n}{k}\right]$.

Например, среди чисел ряда 1,2,3,….25, кратных 3, будет $\left[\frac{25}{3}\right]$=8 чисел; это числа 3,6,9,12,15,18,21,24.

Таким образом, в ряду чисел 1,2,3,4,…. n будет $\left[\frac{n}{k}\right]$ чисел, кратных k.

Прежде чем сформулировать следующее задачу, напомним о канонической форме записи натурального числа n:

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$,

где p_i – простые числа, α_i - натуральные числа, причем все p_i различны.

Например, $6!=720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$, $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$.

Задача 2.*Найти показатель степени* α_s *,в которой данное число* p_s *входит в каноническое разложение числа.*
$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .... \cdot n= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha 3} ..... p_k^{\alpha_k}$.

Решение.По одному разу множитель p_s входит в те $\left[\frac{n}{p_s}\right]$ чисел 1,2,3,….. n, которые делятся на p_s; кроме того, еще по одному разу p_s входит в $\left[\frac{n}{p_s^2}\right]$ чисел, которые делятся на $\left[\frac{n}{p_s^2}\right]$ и т.д.

Таким образом, $\alpha_s = \left[\frac{n}{p_s}\right] + \left[\frac{n}{p_s^2}\right] + \left[\frac{n}{p_s^3}\right] + ...$

Очевидно, ряд обрывается, так как, начиная с некоторого t.

$$\left[\frac{n}{p_s^t}\right] = \left[\frac{n}{p_s^{t+1}}\right] = ... = 0.$$

Пример.Представит в кононической форме 6!

Положим $6!= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} .... \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Тогда

$$\alpha_1 = \left[\frac{6}{2}\right] + \left[\frac{6}{2^2}\right] + \left[\frac{6}{2^3}\right] + ... = 3 + 1 + 0 = 4,$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{6}{3}\right] + \left[\frac{6}{3^2}\right] + ... = 2 + 0 = 2,$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{6}{5}\right] + \left[\frac{6}{5^2}\right] + ... = 1 + 0 = 1,$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = ... = 0.$$

Итак, $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5$.

Пример. Сколько в ряду чисел 1,2,3,…,32 таких, которые не делятся на 2,3,5?

$$B(32;2;3;5)=32-\left(\left[\frac{32}{2}\right] + \left[\frac{32}{3}\right] + \left[\frac{32}{5}\right]\right) +$$

$$+\left(\left[\frac{32}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{32}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{32}{3\cdot 5}\right]\right) - \left[\frac{32}{2\cdot 3\cdot 5}\right] = 32-(16+10+6)+(5+3+2)-1=9.$$

Действительно, это числа 1,7,11,13,17,19,23,29,31.

Рассмотрим задачи, приводящие к уравнениям со знаком «антье».

Задача 4.*Пешеход идет со скоростью 4км/ч,останавливаясь на отдых через каждые 4 км.Продолжительность четвертой остановки 1час.Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место к полудню?*

Обозначим искомое расстояние через x *км.*Тогда число всех остановок равно $\left[\frac{x}{4}\right]$, время отдыха в часах- $\left\{\left[\frac{x}{4}\right] - 1\right\}\frac{1}{6} + 1$ и, наконец, время движения в часах

$$-8-\left\{\left[\frac{x}{4}\right] - 1\right\}\frac{1}{6} - 1 = 7\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right].$$

Составляем уравнение по закону движения $s=vt$:

$x=5\left\{7\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left[\frac{x}{4}\right]\right\}$, т.е. $x=35\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\left[\frac{x}{4}\right]$, откуда

$$\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{215-6x}{5}; \quad \frac{215-6x}{5} \le \frac{x}{4} \prec \frac{215-6x}{5} + 1.$$

После очевидных преобразований получим $\frac{215}{29} \le \frac{x}{4} \prec \frac{220}{29}$,

или $7{,}4\ldots \le \frac{x}{4} \prec 7{,}5\ldots$.

Следовательно, $\left[\frac{x}{4}\right] = 7,$ и тогда $\frac{215-6x}{5} = 7,$ откуда x=30*км.*

Решенное нами уравнение $\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{215-6x}{5}$ имеет вид $\left[\frac{ax+b}{n}\right] = \frac{a_1x+b_1}{n_1}$.

Литература:

1.Алексеева В., Ускова Н.Задачи, содержащие целую и дробную части числа//Математика.1997.№17.[С.59-63].

2.Воронова А.Н.Уравнение с переменной под знаком целой или дробной части//Математика в школе.2002.№4.[С.58-60].

3.Деза Е. И., Котова Л. В. Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями). — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 224 с. — ISBN 978-5-397-02608-6. — (Функции [□] и {□}. с.41-50).