Схема численной оптимизации с приложением к локализации нулей полиномов

Заика Ирина Викторовна, кандидат технических наук, доцент
Таганрогский институт имени А.П. Чехова,
(филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (г. Таганрог)

Ключевые слова: *Численная оптимизация, сортировка, нули полинома, кратность.*

Излагается метод программной локализации экстремумов функций и нулей полиномов с учетом их кратности. Для этого применяется схема сортировки с взаимно однозначным соответствием входных и выходных индексов сортируемых элементов [5, с. 255]. Пусть вначале рассматривается функция одной действительной переменной $y = f(x)$ у которой требуется определить все нули на произвольно заданном промежутке, входящем в область ее определения. Строится равномерная сетка. В узлах сетки считываются значения функции, они принимаются за элементы сортируемого массива

$$c[i] = f(x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

Массив (1) сортируется. Для определенности взята сортировка слиянием изложенной в [1, с. 50]. Тогда условие локализации всех минимальных элементов последовательности (1) примет вид

$$|e[k-l]-e[k]| > \varepsilon, l = \overline{1, k-1}, \qquad (2)$$

где $e[k]$ – элемент массива индексов на выходе сортировки. Смысл условия (2) в том, что в ε -окрестности входного элемента с индексом $e[k]$ нет элемента в отсортированном массиве, превосходящего элемент с этим индексом. Присоединение условия локализации к программе сортировки массива (2) дает устойчивую локализацию минимумов функции $f(x)$ [2, с. 35]. Для локализации и вычисления нулей функции (1) достаточно на вход сортировки подать абсолютные величины ее значений на равномерной сетке $c[i] = | f(x_{i-1}) |$, $i = 1, 2, \dots, n$, и искать минимумы описанным выше способом.

Для нахождения всех экстремумов действительной функции двух действительных переменных

$$z = f(x, y) \qquad (3)$$

в области ее определения первоначально задаются текущие промежутки с границами $[\ x^{(0)}, x^{(N)}\ ]$ и $[\ y^{(0)}, y^{(M)}\ ]$. Внутри ограниченных ими прямоугольников строится равномерная прямоугольная сетка:

$$h = |x^{(N)} - x^{(0)}| / N,\ x_\ell = x^{(0)} + \ell h,\ \ell = 0, 1, \dots, N,\ y_\ell = y^{(0)} + \ell h,\ \ell = 0, 1, \dots, M.$$

Для нахождения минимумов функции (3) выполняется проход в направлении оси OY вдоль j -го столбца прямоугольной сетки, во время которого находится минимальное по строкам значение $c[j] = \min f(x_j, y_i)$ ($1 \le i \le M$) этот минимум заносится на вход сортировки как j -й элемент сортируемого одномерного массива [4, с. 23]. К выходу процедуры подсоединяется оператор локализации минимума, представленный выше.

Значение локализованной абсциссы точки минимума $xk := x0 + e[k]*h$ дает привязку к локализуемой точке двумерного минимума, она фиксируется и аналогичным образом локализуется ордината, в которой достигается приближение к минимальному значению функции (3). Нули функции (3) вычисляются по описанной для минимумов схеме, если на вход метода подать

$$\tilde{z} = | f(x, y) |. \qquad (4)$$

Все локализованные минимумы модуля исследуемой функции (4) будут включать ее нули [3, с. 28]

Представленный метод применяется к вычислению нулей полиномов с учетом кратности. Будем рассматривать полином $P_n(z) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell z^\ell$, у которого могут быть комплексные нули и комплексные коэффициенты. Умножив его на комплексно-сопряженное значение, получим функцию $f(x, y) = |P_n(z)|^2$. Очевидно, нахождение нулей $P_n(z)$ сводится к нахождению нулей функции $f(x, y)$ от двух действительных переменных. Таким образом, комплексные нули многочленов ищутся как минимумы модуля этих полиномов по схеме, описанной для (4) [6, с. 320].

Вычисление кратности нулей полиномов и функций базируется на циклическом возобновлении схемы нахождения ну-

EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

лей функции после деления исходной функции на выражение $p := p*((x-korx)^2+(y-kory)^2)$, где число шагов цикла равно текущему счетчику кратности, а $korx+i*kory$ – текущий корень. Если $p \to 0$, деление исходной функции производится на другое, отличное от близкого к нулю, циклически подсчитываемое выражение $pp := pp*eps$, где число шагов цикла совпадает с текущим значением кратности найденных нулей, а eps – наперед заданная погрешность вычислений. Если минимум метрики достаточно мал, то нуль повторился, его кратность увеличивается на единицу и производится деление функции на выражение p или pp с рекуррентным возвращением программы к началу, иначе запоминается кратность и выполняется переход к следующему фиксированному нулю до тех пор, пока не будет установлена кратность каждого. Описанным образом находятся все нули исходного полинома и указывается их кратность [3, с. 37].

Численный эксперимент вычисления нулей полинома по предложенной схеме выявляет ее устойчивость, а также повышенную точность вычисления нулей полиномов более высокой степени, нежели в Mathcad.

Литература:

1. Заика И.В. Разработка и исследование схем оптимизации на основе алгоритмов сортировки с приложением к идентификации экстремумов решений дифференциальных уравнений Заика И.В. диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Таганрог, 2007.
2. Заика И.В., Ромм Я.Е. Метод нахождения экстремумов решений дифференциальных уравнений на основе адресной сортировки Заика И.В., Ромм Я.Е. депонированная рукопись № 908-В2003 12.05.2003.
3. Ромм Я.Е., Заика И.В. Программная локализация экстремумов функций и разностных приближений решений дифференциальных уравнений. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2005. № М. С. 55.
4. Ромм Я.Е., Заика И.В. Численная оптимизация на основе сортировки с приложением к поиску нулей и экстремумов решений систем дифференциальных и нелинейных уравнений общего вида Ромм Я.Е., Заика И.В. депонированная рукопись № 378-В2009 18.06.2009.
5. Ромм Я.Е., Заика И.В., Лабинцева А.А. Безусловная численная оптимизация при вариации параметров. I Депонированная рукопись № 193-В2008 04.03.2008.
6. Romm Y.E., Zaika I.V. Numerical sorting-based optimization as applied to general differential and nonlinear equations Romm Y.E., Zaika I.V. Cybernetics and Systems Analysis. 2011. Т. 47. № 2. С. 316-329.