Однородная задача Римана с коэффициентом, заданным в виде степенной функции

Якшина Анна Сергеевна, кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВПО «Благовещенский государственный педагогический университет» (г. Благовещенск)

В статье приведён пример решения пространственной однородной задачи Римана, в краевом условии которой в качестве коэффициента рассматривается степенная функция. Решение задачи найдено в виде функции, определяемой интегралом типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка.

Ключевые слова: *задача Римана, интеграл типа Темлякова – Баврина, пространственная краевая задача.*

Г.Л. Луканкин ([2], [3]) в 1963 году положил начало исследованиям по разработке теории задач линейного сопряжения функций двух комплексных переменных. В дальнейшем к этой работе подключились представители созданной профессором А.А. Темляковым при физико-математическом факультете МПУ научной школы, ученики профессоров Г.Л. Луканкина и И.И. Баврина: В.И. Боганов, И.Н. Виноградова, А.В. Нелаев и другие исследователи. При этом в качестве математического аппарата в $\mathbb{C}^2$ использовались интегралы типа Темлякова и интегралы типа Темлякова – Баврина с двоякокруговыми определяющими областями. Развивая теорию указанных интегралов, А.В. Нелаев [4] ввёл в рассмотрение классы функций, определяемых интегралами типа Темлякова и интегралами типа Темлякова – Баврина *k*-го порядка ($k \in \mathbf{N}$) с *n*-круговыми определяющими областями типа (Т) пространства $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. Изучив свойства интеграла типа Темлякова с *n*-круговой областью D типа A в пространстве $\mathbb{C}^n$, он сформулировал и решил пространственную краевую задачу Римана в классе функций, представимых этим интегралом. В дальнейшем его ученик А.Е. Луковников, рассмотрел интеграл типа Темлякова – Баврина первого порядка с *n*-круговой определяющей областью D типа A, в котором компонента *u* задавалась по формуле $u = c_1 z_1 + c_2 \varepsilon z_2 e^{-i\theta_2} + \dots + c_n \varepsilon z_n e^{-i\theta_n}$.

Продолжая исследование в рамках теории краевых задач линейного сопряжения нами [6] были изучены интегралы типа Темлякова – Баврина с *n*-круговой $(n > 2)$ определяющей областью D типа A и компонентой $u_{\nu(k)} = z_1 + c_2 \varepsilon^{\delta_2} z_2 e^{-i\theta_2} + \dots + c_n \varepsilon^{\delta_n} z_n e^{-i\theta_n}$, поставлена и решена в классе функций, определяемых указанными интегралами, пространственная краевая задача Римана. Далее, в работе [5], рассмотрена пространственная однородная краевая задача Римана с линейным и постоянным коэффициентами, решение которой найдено в виде интеграла типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка с определяющей областью D типа A. В настоящей статье приведём пример её решения в случае, степенной функции, взятой в качестве коэффициента, в краевом условии.

Будем считать известными понятие интеграла типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка и его свойства, изложенные в статье [5].

Однородная задача Римана

Пусть на окружности $B_1 = \{\tilde{z}_1' \in \mathbb{C}: (\eta_1, 0, \dots, 0), |\eta_1| = 1\}$ задана функция $G(\eta_1) = C\eta_1^p$, $C - const$, $C \neq 0$, $p \in \mathbf{N}$, которая нигде на ней не обращается в нуль и удовлетворяет на B_1 условию Гёльдера. Тогда краевое условие однородной задачи Римана принимает вид:

$$f^+(\eta_1) = C\eta_1^p \cdot f^-(\eta_1). \qquad (1)$$

Индекс $\text{æ} = \operatorname{Ind} G(\eta_1) = \operatorname{Ind} C\eta_1^p = p$.

Решение задачи (1) будем искать в виде интеграла типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка с определяющей областью D типа A:

$$F_{\nu(k)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int_0^1 d\varepsilon \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta - u_{\nu(k)}} d\eta, \qquad (2)$$

в котором $u_{\nu(k)} = c_1 \varepsilon^{\delta_1} z_1 + c_2 \varepsilon^{\delta_2} z_2 e^{-i\theta_2} + \dots + c_n \varepsilon^{\delta_n} z_n e^{-i\theta_n}$, где k – натуральное число с условием $2 \leq k \leq n-1$, показатели $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ представляют собой набор из нулей и единиц, причём нулю равны $\delta_{\nu_1}, \delta_{\nu_2}, \dots, \delta_{\nu_k}$, $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k$, а единице – все остальные.

Подставляя в условие (1) предельные значения интеграла (2), получаем уравнение $\frac{1}{2\cdot(2\pi)^{n-1}} \int \left[\left(1 + C\eta_1^p\right) \cdot \varphi(\theta,\eta_1) + \frac{1 - C\eta_1^p}{\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta - \eta_1} d\eta \right] d\omega_\theta = 0$, или

$$\left(1+C\eta_1^p\right)\cdot\varphi(\theta,\eta_1)+\frac{1-C\eta_1^p}{\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}d\eta=2\lambda(\theta,\eta_1), \qquad (3)$$

где $\lambda(\theta,\eta_1)$ — некоторая функция, предполагаемая непрерывной по совокупности аргументов и удовлетворяющей по η_1 условию Гёльдера, независимому от θ_h, $h=2,..,n$, являющаяся решением уравнения $\int\lambda(\theta,\eta_1)d\omega_\theta=0$, а коэффициент 2 взят для удобства дальнейших выкладок.

Возьмём в качестве $\lambda(\theta,\eta_1)$ функцию $\lambda(\theta,\eta_1)=\cos\theta_2$. Тогда интегральное уравнение (3) принимает вид:

$$\left(1+C\eta_1^p\right)\cdot\varphi(\theta,\eta_1)+\frac{1-C\eta_1^p}{\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}d\eta=2\cos\theta_2, \qquad (4)$$

Уравнение (4) является сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши. Решать его будем тем же способом, каким решают характеристическое уравнение в теории функций одного комплексного переменного [1]. Для этого рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Psi(\theta,u_{\nu(k)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-u_{\nu(k)}}d\eta. \qquad (5)$$

Учитывая, что $\lim\limits_{z\to\tilde{z}_1}u_{\nu(k)}=\eta_1$, и используя формулы Сохоцкого для интеграла (5), перепишем интегральное уравнение (4) в виде

$$\varphi(\theta,\eta_1)+C\eta_1^p\varphi(\theta,\eta_1)+2\Psi^+(\theta,\eta_1)-\varphi(\theta,\eta_1)-C\eta_1^p\varphi(\theta,\eta_1)-2C\eta_1^p\Psi^-(\theta,\eta_1)=2\cos\theta_2 \text{ или}$$

$$\Psi^+(\theta,\eta_1)=C\eta_1^p\cdot\Psi^-(\theta,\eta_1)+\cos\theta_2. \qquad (6)$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (4), а значит и поставленной однородной задачи Римана, свелось к решению задачи Римана с краевым условием (6).

Учитывая, что $æ=\operatorname{Ind}G(\eta_1)=p>0$, решение задачи имеет вид

$$\Psi(\theta,u_{\nu(k)})=\frac{X(u_{\nu(k)})}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\cos\theta_2}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta-u_{\nu(k)}}+X(u_{\nu(k)})\cdot c_0, \qquad (7)$$

где $X(u_{\nu(k)})=\begin{cases}\exp\Gamma^+(u_{\nu(k)})=\exp[\ln C]=C, & \text{если } |u_{\nu(k)}|<1,\\ u_{\nu(k)}^{-æ}\exp\Gamma^-(u_{\nu(k)})=u_{\nu(k)}^{-p}\exp 0=u_{\nu(k)}^{-p}, & \text{если } |u_{\nu(k)}|>1,\end{cases}$

$$\Gamma(u_{\nu(k)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\ln\left[\eta^{-p}\cdot C\eta^p\right]}{\eta-u_{\nu(k)}}d\eta=\frac{\ln C}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{d\eta}{\eta-u_{\nu(k)}}=\begin{cases}\ln C, \text{ если } |u_{\nu(k)}|<1,\\ 0, \text{ если } |u_{\nu(k)}|>1,\end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\Psi^+(\theta,u_{\nu(k)})=\frac{X^+(u_{\nu(k)})}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\cos\theta_2}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta-u_{\nu(k)}}+X^+(u_{\nu(k)})\cdot c_0=\cos\theta_2+Cc_0,$$

$$\Psi^-(\theta,u_{\nu(k)})=\frac{X^-(u_{\nu(k)})}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\cos\theta_2}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta-u_{\nu(k)}}+X^-(u_{\nu(k)})\cdot c_0=\frac{c_0}{u_{\nu(k)}^p}.$$

Подставляя определяющие функции $\Psi^+(\theta,u_{\nu(k)})$ и $\Psi^-(\theta,u_{\nu(k)})$ интеграла (2) в формулы, по которым вычисляется этот интеграл в областях D и E_1, получаем решение поставленной задачи:

в области D:

$$F_{\nu(k)}(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_0^1 d\varepsilon\int[\cos\theta_2+Cc_0]d\omega_\theta=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_0^1 d\varepsilon\int\limits_0^{2\pi}d\theta_2\cdots\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta_2 d\theta_n+Cc_0=Cc_0,$$

в области E_1: $$F_{\nu(k)}(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_0^1 d\varepsilon\int\frac{c_0}{u_{\nu(k)}^p}d\omega_\theta=\frac{c_0}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_0^1 d\varepsilon\int\frac{d\omega_\theta}{u_{\nu(k)}^p}. \qquad (8)$$

Учитывая структуру компоненты $u_{\nu(k)}$ в интеграле (2), для определённости положим, что $k=2$, $\nu_2=2$ и, следовательно, $\delta_2=0$, $\delta_3=\cdots=\delta_n=1$. Тогда $u_{\nu(k)}=z_1+c_2z_2e^{-i\theta_2}+c_3\varepsilon z_3e^{-i\theta_3}+\cdots+c_n\varepsilon z_ne^{-i\theta_n}$. Подставляя компоненту $u_{\nu(k)}$ в формулу (8), вычислим интеграл в области E_1. Для упрощения вычислений введём обозначения: $a = z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_2} + c_3 \varepsilon z_3 e^{-i\theta_3} + \dots + c_{n-1}\varepsilon z_{n-1} e^{-i\theta_{n-1}}$, $b = c_n \varepsilon z_n$. Тогда, применяя методы интегрирования имеем

$$F^-_{\nu(k)}(z) = \frac{c_0}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^1 d\varepsilon \int \frac{d\omega_\theta}{\left(z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_2} + c_3\varepsilon z_3 e^{-i\theta_3} + \dots + c_n \varepsilon z_n e^{-i\theta_n}\right)^p} =$$
$$= \frac{c_0}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^1 d\varepsilon \int \frac{d\omega_\theta}{\left(a + b e^{-i\theta_n}\right)^p} = 0 .$$

Следовательно, интеграл типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка принимает вид: $F_{\nu(k)}(z) = \begin{cases} Cc_0, & \text{в области D,} \\ 0, & \text{в области } \mathrm{E}_1. \end{cases}$

Таким образом, интеграл типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка при переходе через точки окружности B_1 из области D в область E_1 делает скачок равный Cc_0.

Найдём решение однородной задачи Римана в виде интеграла типа Темлякова – Баврина (2) с плотностью $\varphi(\theta,\eta)$, где $\varphi(\theta,\eta_1) = \Psi^+(\theta,\eta_1) - \Psi^-(\theta,\eta_1)$: $\varphi(\theta,\eta_1) = \cos\theta_2 + Cc_0 - \frac{c_0}{\eta_1^p}$, тогда

$$F_{\nu(k)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i}\int_0^1 d\varepsilon \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\cos\theta_2 + Cc_0 - \frac{c_0}{\eta^p}}{\eta - u_{\nu(k)}} d\eta .$$

Наличие в найденном решении задачи произвольной постоянной c_0 и некоторой функции $\lambda(\theta,\eta) = \cos\theta_2$, которую мы взяли произвольно, указывает на неоднозначность решения. Коэффициент c_0 можно вычислить, если наложить на искомую функцию $F^+_{\nu(k)}(z) = \underset{z\in D}{F_{\nu(k)}(z)}$ (или $F^-_{\nu(k)}(z) = \underset{z\in E_1}{F_{\nu(k)}(z)}$) одно из независимых условий. Например, задать в начале координат (где $u_{\nu(k)} = 0$) значение определяющей функции $\Psi^+\left(\theta, u_{\nu(k)}\right)\Big|_{u_{\nu(k)}=0} = \Psi^+(\theta,0) = A_1$, тогда подставляя его в уравнение, задающее определяющую функцию $\Psi^+\left(\theta, u_{\nu(k)}\right)$, получаем $c_0 = A_1$, и, следовательно, $\varphi(\theta,\eta_1) = \cos\theta_2 + CA_1 - \frac{A_1}{\eta_1^p}$.

Обобщая результаты, полученные в настоящей статье и статье [5], можно сделать вывод: решением однородной задачи Римана с коэффициентом $G(\eta_1) = C\eta_1^p$, где $C - const$, $C \neq 0$, $p \in \mathbf{N}$, в краевом условии, при любом натуральном p является интеграл типа Темлякова – Баврина I рода первого порядка

$F_{\nu(k)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i}\int_0^1 d\varepsilon \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\cos\theta_2 + Cc_0 - \frac{c_0}{\eta^p}}{\eta - u_{\nu(k)}} d\eta$, значение которого вычисляется по формуле:

$$F_{\nu(k)}(z) = \begin{cases} Cc_0, & \text{в области D,} \\ 0, & \text{в области } \mathrm{E}_1. \end{cases}$$

Литература:

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука. – 1977. – 640 с.
2. Луканкин Г.Л. О задачах линейного сопряжения функций двух комплексных переменных // Математический анализ и теория функций: Респ. сб. трудов. – М.: изд-во МОПИ. – 1973. – Вып. 1. – С. 10 – 24.
3. Луканкин Г.Л. Пространственная задача линейного сопряжения // Вестник МАН ВШ, № 4(6). – 1998. – С. 82 – 90.
4. Нелаев А.В. Пространственная краевая задача линейного сопряжения для функций, голоморфных в кратнокруговых областях $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. тр. 2001. Т. 8. № 2. С. 406 – 414.
5. Нелаев А.В., Якшина А.С. Пространственная однородная краевая задача Римана с линейным коэффициентом // Естественные и технические науки, 2015, № 2 (80). С. 12 – 25.
6. Якшина А.С. Исследование свойств интегральных представлений функций, голоморфных в кратнокруговых областях, и их приложение к решению пространственной краевой задачи Римана: Автореф. дис. ... кандидата физ.-мат. наук. – Москва, 2004. – 19 с.