Анализ конфликта в стохастических технологических системах

Воронова Елена Васильевна, кандидат технических наук
Воронежский государственный университет (г. Воронеж)
Десятов Дмитрий Борисович, доктор технических наук, профессор
Воронежский государственный университет инженерных технологий (г. Воронеж)

Многие современные технологические системы являются сложными стохастическими системами. Задачи оптимизации, возникающие при их исследовании, как правило, носят векторный характер. Поэтому целесообразно строить модели, учитывающие вероятностную природу конфликта основных параметров оптимизации.

Ключевые слова: *вероятностный конфликт, случайные события, теорема, доказательство, стахостические системы.*

Многие современные технологические системы являются сложными стохастическими системами. Задачи оптимизации, возникающие при их исследовании, как правило, носят векторный характер. Поэтому целесообразно строить модели, учитывающие вероятностную природу конфликта основных параметров оптимизации.

В соответствии с [1, с. 79] будем считать, что некоторая система S_1 конфликтует с системой S_2, (S_2 ***K*** S_1), если

$$q(S_1,S_2)<q(S_1,\overline{S_2}), \qquad (1)$$

где q - функция полезности надсистемы $S = \{S_1,S_2\}$. Для стохастических технологических систем в качестве функции полезности будем рассматривать вероятность достижения заданной цели. При этом можно говорить о конфликте случайных событий, заключающихся в достижении некоторых целевых состояний. Тогда, если А и В - совместные зависимые случайные события (например, заключающиеся в достижении целевых состояний стохастическими системами S_1 и S_2 соответственно), то вероятностный конфликт между событиями (А ***K*** В) можно определить двумя способами [2, с. 153; 3, с. 230]:

<u>Определение 1.</u> Между А и В наблюдается вероятностный конфликт первого рода (А $\boldsymbol{K_1}$ В), если

$$P(A/B) < P(A/\overline{B}), \qquad (2)$$

где: $P(A/B)$, $P(A/\overline{B})$ - условные вероятности.

<u>Определение 2.</u> Между А и В наблюдается вероятностный конфликт второго рода (А $\boldsymbol{K_2}$ В), если

$$P(A/B) < P(A). \qquad (3)$$

<u>Теорема 1.</u> Из неравенства (2) следует неравенство (3).

Доказательство. По известной теореме о полной вероятности:

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) \qquad (4)$$

Тогда из (2) следует:

$$P(A) > P(A/B)P(B) + P(A/B)P(\overline{B}) = P(A/B)\left[P(B) + P(\overline{B})\right]. \qquad (5)$$

Согласно одной из аксиом теории вероятностей:

$$P(B) = P(\overline{B}) = 1. \qquad (6)$$

Из (4) и (5) следует $P(A) > P(A/B)$, что и требовалось доказать.

<u>Теорема 2</u>. Вероятностный конфликт второго рода является симметричным, то есть из А $\boldsymbol{K_2}$ В следует, что В $\boldsymbol{K_2}$ А.

Доказательство. Имеем неравенство (3). Из формулы умножения для зависимых событий следует:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \qquad (7)$$

Отсюда с учетом (3) получаем:

$$P(B/A) = \left[P(B)P(A/B)\right]/P(A) < \left[P(B)P(A)\right]/P(A) = P(B) \qquad (8)$$

<u>Теорема 3</u>. Вероятностный конфликт первого рода является симметричным, то есть из А $\boldsymbol{K_1}$ В следует, что В $\boldsymbol{K_1}$ А.

Доказательство. Имеем неравенство (2). По теореме о полной вероятности можно записать:

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A}). \qquad (9)$$

Тогда:

$$P(B/\overline{A}) = \left[P(B) - P(B/A)P(A)\right]P(\overline{A}) = \left[P(B/) - P(B/A) + P(B/A)P(A)\right]/P(\overline{A}) =$$
$$= \left\{P(B) - P(B/A) + P(B/A)[1 - P(A)]\right\}/P(\overline{A}) \qquad (10)$$

Согласно (6):

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (11)$$

Из (10) и (11) следует:

$$P(B/\overline{A}) = \left[P(B) - P(B/A)\right]/P(\overline{A}) + P(B/A). \qquad (12)$$

Из Теоремы 1, неравенства (8) и неравенства $P(\overline{A}) > 0$ (если $P(\overline{A}) = 0$, то события А и В являются независимыми, что противоречит принятым предположениям) следует, что:

$$[P(B)P(B/A)]/P(\overline{A}) > 0. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) имеем:

$$P(B/\overline{A}) > P(B/A), \qquad (14)$$

что и требовалось доказать.

Теоремы 1, 2 и 3 свидетельствуют о симметричности вероятностного конфликта.

Теорема 4. А K_1В тогда и только тогда, когда А K_2В.

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы следует из Теоремы 1, то есть из (2) следует (3). Докажем достаточность. Имеем неравенство (3). Из (6) можно записать

$$P(A/\overline{B}) = [P(A) - P(A/B)P(B)]/P(\overline{B}). \qquad (15)$$

Из (15), (3) и (11) следует:

$$P(A/\overline{B}) > [P(A/B) - P(A/B)P(B)]/P(\overline{B}) = \{P(A/B)[1-P(B)]\}/P(\overline{B}) = = [P(A/B)P(\overline{B})]/P(\overline{B}) = P(A/B),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если А и В конфликтуют, то выполняется следующее соотношение:

$$P(A/B) < P(A) < P(A/\overline{B}). \qquad (16)$$

Доказательство. По условию теоремы выполняются неравенства (2) и (3), откуда следует левое неравенство в (16). Докажем, что при этом $P(A) < P(A/\overline{B})$.

Из (5), (2) и (6) следует:

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) < P(A/\overline{B})P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) = P(A/\overline{B})[P(B) + P(\overline{B})] = P(A/\overline{B}),$$

что и требовалось доказать.

Кроме конфликта между случайными событиями А и В может наблюдается отношение вероятностного сотрудничества $(A\ B)$, если выполняется условие:

$$P(A/B) > P(A) \qquad (17)$$

Следует отметить, что между вероятностями $P(A)$ и $P(A/B)$ кроме (3) и (17) может также наблюдаться соотношение:

$$P(A/B) = P(A). \qquad (18)$$

В этом случае события А и В являются независимыми.

Элементарные свойства отношений вероятностного конфликта и сотрудничества изложим в следующих теоремах.

Теорема 6. Отношение вероятностного конфликта является антирефлексивным, то есть неверно, что А KА.

Доказательство. Так как, то условие (3) не выполняется.

Теорема 7. Отношения вероятностного конфликта и сотрудничества являются симметричными, то есть:

а). из А KВ следует, что В KА;

б). из А В следует, что В А.

Доказательство.

а). Следует из теоремы 2.

б). Имеем неравенство (10). Из формулы умножения для зависимых событий (6) следует:

$$P(B/A) = [P(B)P(A/B)]/P(A)$$
$$[P(B)P(A)]/P(A) = P(B),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Из А KВ следует, что K.

Доказательство. По условию теоремы имеем неравенство (3). По теореме о полной вероятности можно записать формулу (6), откуда, учитывая (3) имеем:

$$P(A) < P(A)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}),$$

$$\text{или } P(A)[1 - P(B)] < P(A/\overline{B})P(\overline{B}). \qquad (19)$$

Согласно одной из аксиом теории вероятности выполняется равенство (6). Из (6) и (19) следует:

$$P(A)P(\overline{B}) < P(A/\overline{B})P(\overline{B}).$$

Так как $P(\overline{B}) > 0$, то:

$$P(A) < P(A/\overline{B}). \qquad (20)$$

Учитывая (6), неравенство (20) можно преобразовать:

$$1 - P(\overline{A}) < 1 - P(\overline{A}/\overline{B}),$$

откуда $P(\overline{A}/\overline{B}) < P(\overline{A})$ или $\overline{A}\ K\overline{B}$, что и требовалось доказать.

Теорема 8. Из А KВ следует, что а) $\overline{A}\ \overline{K}$В, б). А $\overline{K}\ \overline{B}$.

Доказательство. а). Из (3) и (6) имеем

$1 - P(\overline{A}/B) < 1 - P(\overline{A})$, откуда $P(\overline{A}/B) > P(\overline{A})$ или В. Утверждение в) является прямым следствием неравенства (13).

<u>Следствие</u>. Из A K B следует, что а). $\overline{B}\ K\ \overline{A}$, б). $\overline{B}\ \overline{K}\ A$, в). $B\ \overline{K}\ \overline{A}$.
Доказательство следует из теорем 6, 7 и 8.
<u>Теорема 9</u>. Отношение вероятностного конфликта нетранзитивно.

Доказательство. Достаточно найти такие события A,B и C, что A K B, B K C, а A $\overline{K}$ C.
Пусть $P(A) = 0.4; P(B) = 0.5; P(C) = 0.08;$

$$P(A/B) = 0.2; P(C/B) = 0.02; P(C/A) = 0.2.$$

Тогда:

$$P(A/B) < P(A),$$

$$P(C/B) \geq P(C),$$

$$P(C/A) \geq P(C).$$

Следовательно A K B, B K C, но A $\overline{K}$ C.

Выведены определения вероятностного и статистического конфликта для анализа функционирования технологической системы и множества статистических конфликтных решений. Предложены модели и численные схемы оценки конфликта, которые позволяют решать задачи оптимизации и выбора на множестве Парето, возникающие при исследовании функционирования стохастических технологических систем.

Данные модели могут также использоваться для анализа технологических процессов.

Литература:

1. Сысоев В.В. Конфликт. Сотрудничество. Независимость. Системное взаимодействие в структурно-параметрическом представлении: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Изд-во Московской академии экономики и права, 1999.- 151 с.

2. Десятов Д.Б., Новосельцев В.И. Теория конфликта: учеб. пособие для студентов вузов. Воронеж: Научная книга, 2008. – 346 с.

3. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – 4-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2005. – 343 с.