www.esa-conference.ru

УДК 539.19

Траектории частиц диэлектрической жидкости конечной толщины в поляризующихся средах

Егерева Эльвира Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Вечканова Екатерина Вячеславовна, студентка
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

Аннотация. *В статье исследуется распространение поверхностных волн в поляризующейся жидкой среде, находящееся в электрическом поле конденсатора, к обкладкам которого приложена разность потенциалов. Слой жидкости конечной толщины граничит с атмосферой. Записаны уравнения движения жидкости и граничные условия на границах раздела фаз. Решение краевой находится методом малого параметра. Получено выражение для траектории частицы диэлектрической жидкости конечной толщины.*

Ключевые слова: *траектория частицы, поляризующиеся жидкие среды, диэлектрическая жидкость, переносная скорость Стокса, фазовая скорость волны.*

Annotation. *The article deals with the propagation of surface waves in a polarizing liquid medium located in the electric field of the capacitor, to the plates of which the potential difference is applied. The fluid layer of finite thickness is bordered by the atmosphere. Equations of fluid motion and boundary conditions at the interface are recorded. The boundary solution is found by the small parameter method. An expression for the trajectory of a particle of a dielectric fluid of finite thickness is obtained.*

Keywords: *the trajectory of the particles, polarizing the liquid medium, a dielectric fluid, the drive speed of the Stokes phase velocity of the wave.*

Исследование распространения волн в поляризующихся средах представляет большой интерес для изучения природных явлений, а также многих технологических процессах. Среди первых работ в этой области основными являются исследования Стокса, который предложил два метода решения волновых задач. Первый метод позволяет получить решение в виде рядов по малому амплитудному параметру, наиболее полно изложенными в работах М. Ван-Дайх [1], А. Х. Найфэ [2,3]. Сходимость рядов была доказана и Леви-Чивита. В дальнейшем метод Стокса получил развитие в работах Зеньковича.

Рассматривается задача о распространении поверхностных волн в поляризующейся жидкой среде, находящейся в электрическом поле конденсатора, к обкладкам которого приложена разность потенциалов. Определим траектории частиц поляризующейся жидкости в волне. Для этого воспользуемся методом малого параметра.

Координаты частиц жидкости удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$v_x{}^* = \frac{dx^*}{dt^*};\ \ v_z{}^* = \frac{dz^*}{dt^*}, \tag{1}$$

которые в безразмерном виде переходят в дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{kc}{\omega_p}(1-\delta v_x), \frac{dz}{dt} = \frac{kc\delta}{\omega_p}v_z.$$

Подставляя ряды

$$x = \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i X_i;\ z = \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i Z_i;\ \frac{kc}{\omega_p} = 1 + \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i \gamma_i$$

в уравнения (1) и учитывая разложение функций в ряды Тейлора

$$sh(z+h_1) = sh(h_1+Z_0) + ch(h_1+Z_0)(\delta Z_1 + \ \dots),$$
$$ch(z+h_1) = ch(h_1+Z_0) + sh(h_1+Z_0)(\delta Z_1 + \ \dots),$$

а также разложения $\cos x$ и $\sin x$, будем иметь

$$\frac{dX_0}{dt} = -1, \frac{dZ_0}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dX_1}{dt} = -\gamma_1\frac{ch(Z_0+h_1)}{shh_1}\cos X_0, \frac{dZ_1}{dt} = \frac{sh(Z_0+h_1)}{shh_1}\sin X_0,$$

$$\frac{dX_2}{dt} = -\gamma_2 + \frac{\gamma_1}{shh_1}ch(Z_0+h_1)\cos X_0 +$$
$$+\frac{Z_1}{shh_1}sh(Z_0+h_1)\cos X_0 - \frac{X_1}{shh_1}ch(Z_0+h_1)\sin X_0 +$$
$$+\frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1}ch2(Z_0+h_1)\cos 2X_0,$$

$$\frac{dZ_2}{dt} = \frac{\gamma_1}{\mathrm{sh}h_1}sh(Z_0+h_1)\sin X_0 +$$
$$+\frac{Z_1}{shh_1}ch(Z_0+h_1)\sin X_0 + \frac{X_1}{shh_1}sh(Z_0+h_1)\cos X_0 +$$
$$+\frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1}sh2(Z_0+h_1)\sin 2X_0,$$

$$\frac{dX_3}{dt} = -\gamma_3 + \frac{\gamma_2}{shh_1} ch(Z_0+h_1)\cos X_0 +$$
$$+\gamma_1[\frac{1}{shh_1}(Z_1 sh(Z_0+h_1)\cos X_0 - X_1 ch(Z_0+h_1)\sin X_0) +$$
$$+\frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1} ch2(Z_0+h_1)\cos 2X_0] + Z_2 sh(Z_0+h_1)\cos X_0 -$$
$$-X_2 ch(Z_0+h_1)\sin X_0 + \frac{1}{2}(Z_1^2 - X_1^2) ch(Z_0+h_1)\cos X_0 -$$
$$-X_1 Z_1 sh(Z_0+h_1)\sin X_0 + \frac{4Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1}(Z_1 sh2(Z_0+h_1)\cos 2X_0 -$$
$$-X_1 ch2(Z_0+h_1)\sin 2X_0) + \frac{3Q_3{}^{(2)}}{sh3h_1 \cdot sh^3 h_1} \times$$
$$\times\, ch3(Z_0+h_1)\cos 3X_0 + \frac{Q_1{}^{(2)}}{shh_1} ch(Z_0+h_1)\cos X_0,$$
$$\frac{dZ_3}{dt} = \frac{\gamma_2}{shh_1} sh(Z_0+h_1)\sin X_0 +$$
$$+\gamma_1\left[\frac{1}{\mathrm{shh}_1}(Z_1 ch(Z_0+h_1)\sin X_0 + X_1 sh(Z_0+h_1)\cos X_0) +\right.$$
$$\left.+\frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1} sh2(Z_0+h_1)\sin 2X_0\right] + Z_2 ch(Z_0+h_1)\sin X_0 +$$
$$+X_2 sh(Z_0+h_1)\cos X_0 + \frac{1}{2}(Z_1^2 - X_1^2) sh(Z_0+h_1)\sin X_0 +$$
$$+X_1 Z_1 ch(Z_0+h_1)\cos X_0 + \frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1}(Z_1 ch2(Z_0+h_1)\sin 2X_0 +$$
$$+X_1 sh2(Z_0+h_1)\sin 2X_0) + \frac{3Q_3{}^{(2)}}{sh3h_1 \cdot sh^3 h_1} \times$$
$$\times\, sh3(Z_0+h_1)\sin 3X_0 + \frac{Q_1{}^{(2)}}{shh_1} sh(Z_0+h_1)\sin X_0.$$

Решая систему уравнений (2) с учетом периодичности X_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$ находим

$$X_0 = a - t, Z_0 = b; \tag{3}$$
$$X_1 = -\frac{ch(b+h_1)}{shh_1}\sin(a-t), Z_1 = \frac{sh(b+h_1)}{shh_1}\cos(a-t), \gamma_1 = 0;$$
$$X_2 = \frac{1}{4sh^2 h_1}\left(2Q_2{}^{(1)} \cdot thh_1 \cdot ch2(b+h_1) - 1\right)\sin 2(a-t),$$
$$Z_2 = \frac{2Q_2{}^{(1)}}{sh2h_1} sh2(b+h_1)\cos 2(a-t), \gamma_2 = \frac{1}{2sh^2 h_1} ch2(b+h_1);$$
$$X_3 = \frac{1}{12sh^3 h_1}\left[4Q_2{}^{(1)} \cdot thh_1 \cdot ch(b+h_1) - \left(Q_2{}^{(1)} \cdot thh_1 \cdot shh_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{12Q_3{}^{(2)}}{sh3h_1}\right) ch3(b+h_1)\right]\sin 3(a-t) +$$
$$+\frac{1}{8sh^3 h_1}\{[(2Q_2{}^{(1)} thh_1 + 1) shh_1 - 8Q_1{}^{(2)} sh2h_1 - 2] \times$$
$$\times\, ch(b+h_1) - \left(shh_1 + 8Q_2{}^{(1)} thh_1 + 2\right) ch3(b+h_1)\}\sin(a-t),$$
$$Z_3 = \frac{1}{12sh^3 h_1}\left[\left(Q_2{}^{(1)} \cdot thh_1 \cdot shh_1 + \frac{12Q_3{}^{(2)}}{sh3h_1}\right) sh3(b+h_1) - \right.$$
$$\left.-(chh_1 + 4Q_2{}^{(1)} thh_1) sh(b+h_1)\right]\cos 3(a-t) +$$
$$+\frac{1}{8sh^3 h_1}\{[8Q_1{}^{(2)} thh_1 \cdot sh2h_1 - (2Q_2{}^{(1)} thh_1 + 3) shh_1 - 2] \times$$
$$\times\, sh(b+h_1) + (8Q_2{}^{(1)} thh_1 - shh_1 + 2) sh3(b+h_1)\} \times$$
$$\times \cos(a-t);\ \gamma_3 = 0.$$

Собирая вместе три приближения, можно записать безразмерный кинематический закон движения частицы жидкости, имевшей в состоянии покоя (при отсутствии волны) безразмерные координаты *a, b*:

$$x(a,b,t) = X_0 + \delta X_1 + \delta^2 X_2 + \delta^3 X_3, \tag{4}$$
$$z(a,b,t) = Z_0 + \delta Z_1 + \delta^2 Z_2 + \delta^3 Z_3.$$

Переход к размерным выражениям осуществляется посредством соотношений $x = k(x^* - ct^*), z = kz^*, t = \omega_p t^*$.

Выражение для переносной скорости Стокса имеет вид

$$V_s^* = \delta^2 c_0 \gamma_2 = \delta^2 \frac{c_0}{2sh^2 h_1} ch2(b + h_1), \quad (5)$$

$$c_0 = \left[th\, kh_1{}^* \left(\frac{g}{k} + \sigma_c - \frac{\varepsilon_2 \eta \sigma_{e1} (\eta - 1)^2}{\eta th\, kh_2{}^* + th\, kh_1{}^*} \right) \right]^{1/2}.$$

Наибольшего значения V_s^* достигает на свободной поверхности жидкости, то есть при $b = kz_0^* = 0$

$$V_s^* = \delta^2 C_0 ch \frac{2h_1}{sh^2 h_1}.$$

Наименьшего значения переносной скорость достигает на твердой поверхности при $b = -h_1$ или нижней обкладке конденсатора.

$$V_s^* = \delta^2 C_0 / 4sh^2 h_1.$$

Наличие поверхностного натяжения приводит к увеличениюV_s^*, по сравнению с его отсутствием. При увеличении электрического поля V_s^* убывает и обращается в нуль при значении $E_{01}{}^*$, для которого

$$\frac{g}{k} + \sigma_c = \frac{\varepsilon_2 \eta \sigma_{e1} (\eta - 1)^2}{\eta th\, kh_2{}^* + th\, kh_1{}^*}.$$

При этом поле в атмосфере E_{02}^* находится из равенства $E_{02}{}^* = \eta\, E_{01}{}^*$.

Введем два безразмерных параметра взаимодействия, характеризующих относительную величину капиллярных и электрических сил по сравнению с гравитационными

$$\Pi_c = \frac{\alpha k^3}{\rho g}, \Pi_E = \frac{\varepsilon_2 \eta \sigma_{e1} (\eta - 1)^2 k}{g(\eta th\, kh_2{}^* + th\, kh_1{}^*)} \quad (6)$$

При $\Pi_c >> 1$, что соответствует коротким волнам, выражение (5) принимает вид $V_s{}^* = \delta^2 2xp(2b) \Pi_c{}^{1/2}$. При Π_c <<1 для длинных волн, выражение (5) принимает вид $V_s{}^* = \delta^2 2 \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \frac{ch2h_1}{sh^2 h_1}$.

В нелинейных волнах период колебаний частицы τ_p превышает период волны τ_w:

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = 1 + \delta^2 \gamma_2.$$

Это различие периодов определяется исключительно высотой волны δ, глубиной частицы жидкости $b = kz^*$ и не зависит от поверхностного натяжения и электрического поля. В линейном приближении $\tau_p = \tau_w$.

В нелинейном приближении траектория частицы разомкнутая, что приводит к наличию переносной скорости. Однако в линейном приближении траектория замкнута. Найдем ее вид. Пишем в линейном приближении

$$x = X_0 + \delta X_1 = a - t - \delta \frac{ch(b + h_1)}{shh_1} sin(a - t),$$

$$z = Z_0 + \delta Z_1 = b + \delta \frac{sh(b + h_1)}{shh_1} cos(a - t).$$

В размерных обозначениях имеем

$$x^* = x_0{}^* - \xi_{max}{}^* \frac{ch(b + h_1)}{shh_1} sin(kx_0{}^* - \omega_p t^*). \quad (6)$$

$$z^* = z_0{}^* + \xi_{max}{}^* \frac{sh(b + h_1)}{shh_1} cos(kx_0{}^* - \omega_p t^*),$$

$$\frac{(x^* - x_0{}^*)^2}{A^2} + \frac{(z^* - z_0{}^*)^2}{B^2} = 1,$$

$$A = \xi_{max}{}^* \frac{ch(b + h_1)}{shh_1}, B = \xi_{max}{}^* \frac{ch(b + h_1)}{shh_1},$$

где $\xi_{max}{}^*$ — максимальная амплитуда.

Из (6) следует, что частица движется по эллипсу с полуосями A и B, отношение которых равно

$$\frac{A}{B} = \frac{ch(b + h_1)}{sh(b + h_1)}$$

Отношение A/B минимально при $b \to 0$ (на свободной поверхности), $A/B \to \infty$ при $b = -h$. Таким образом, на твердой поверхности эллипс вырождается в отрезок прямой, параллельной дну. Полуоси A и B не зависят от поверхностного натяжения, электрического поля и других параметров среды. Однако скорость движения частицы жидкости по траектории зависит от поверхностного натяжения и электрического поля, поскольку $\omega_p \approx c_0 k$. Отсюда следует, что при увеличении поверхностного натяжения, скорость частицы увеличивается, а при увеличении электрического поля $E_0{}^*$ уменьшается и обращается в нуль при том же значении $E_0{}^*$, при котором $V_s{}^*= 0$. Таким образом, изменяя величину электрического поля $E_0{}^*$ можно регулировать интенсивность движения частиц жидкости. Электрическое поле дает возможность регулировать интенсивность протекания процессов в жидкостях в том числе и в состоянии невесомости при g=0.

Литература:

1. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
2. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456с.
3. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536с.
4. Тактаров Н. Г. Об одной модели двумерного поляризующегося континуума // Доклады АН СССР, 1987. Т. 292. №2. С. 288-291.
5. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред // Магнитная гидродинамика. 1972. №1. С. 3-11.