www.esa-conference.ru

Задача со смещением и интегральным условием для уравнения гиперболического типа третьего порядка вырождающегося на координатных плоскостях

Васильева Ольга Альбертовна, кандидат физико-математических наук, доцент
Родионова Ирина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва

Аннотация. *На множестве, ограниченном плоскостями* $x = h, y = h, y = -x, z = 0\ (h > 0)$ *рассматривается уравнение гиперболического типа третьего порядка, коэффициенты которого имеют сингулярную особенность на граничных плоскостях* $y = 0, z = 0$ *и на внутренней* $x = 0$. *Поставлена краевая задача с граничными условиями на плоскости* $z = 0$, *со смещением, связывающим значения искомого решения. На внутренних плоскостях* $y = x,\ x = 0$ *задаются нестандартные условия сопряжения, в которые входят дробные производные решения. Однозначная решимость поставленной задачи доказана методом интегральных уравнений. Решение получено в явном виде.*

Ключевые слова. *Уравнение гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнение.*

На множестве $\underline{O} = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, где

$$H_1 = \left\{(x,y,z) \left|\begin{matrix} 0 < x < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right.\right\}, h > 0,\ H_2 = \left\{(x,y,z) \left|\begin{matrix} 0 < y < x < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right.\right\},$$

$$H_3 = \left\{(x,y,z) \left|\begin{matrix} 0 < -x < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right.\right\}$$

рассмотрим уравнение

$$U_{xyz} + \frac{\gamma}{z}U_{yz} + \frac{\beta}{y}U_{xz} + \frac{\alpha}{x}U_{yz} + \frac{\beta\gamma}{yz}U_x +$$
$$+\frac{\alpha\gamma}{xz}U_y + \frac{\alpha\beta}{xy}U_z + \frac{\alpha\beta\gamma}{xyz}U = 0, 0 < \alpha,\beta,\gamma - const < 1, (1)$$

коэффициенты которого на координатных плоскостях имеют сингулярную особенность.

Задача IS. На множестве $\underline{O}$ найти решение уравнения (1) с условиями

$$\lim_{z\to 0} z^\gamma U(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y), (x,y) \in \overline{D}_1, \overline{D}_1 = \{O < x < y < h\}, \\ f_2(x,y), (x,y) \in \overline{D}_2, \overline{D}_2 = \{O < y < x <\}h, \\ f_3(x,y), (x,y) \in \overline{D}_3, \overline{D}_3 = \{O < -x < y <\}; \end{cases} (2)$$

$$\widetilde{U}(x,0,z) + \sigma(x,z)\widetilde{U}(h,x,z) = \psi(x,z)\ (3)$$

$$\widetilde{U} = y^\beta U(x,y,z), (x,z) \in D_0, D_0 \left\{(x,z) \left|\begin{matrix} 0 < x < h, \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right.\right\},$$

$$-\int_y^0 t^\alpha U(t,y,z)dt = \varphi(y,z), (y,z) \in \overline{D}^*,\ D_0 \left\{(y,z) \left|\begin{matrix} 0 < y < h, \\ 0 < z < +\infty \end{matrix}\right.\right\},$$

с сопряжением на нехарактеристической плоскости $y = x$:

$$\lim_{y\to x+0} x^{2\beta}U(x,y,z) = \lim_{y\to x-0} x^{2\alpha}U(x,y,z), (5)$$

$$\lim_{y\to x+0} x^{2\beta}(U_x - U_y) = -\lim_{y\to x-0} x^{2\alpha}(U_x - U_y), (6)$$

и на характеристической плоскости $x = 0$:

$$\lim_{y\to 0+0} x^\alpha U(x,y,z) = \lim_{y\to 0-0} (-x)^\alpha U(x,y,z), (7)$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\partial}{\partial x}\int_x^y t^\alpha (t-x)^{-z_1} U(t,y,z)dt =$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\partial}{\partial x}\int_x^y t^\alpha (x-t)^{-z_2} U(t,y,z)dt, 0 < z_1, z_2 < 1. (8)$$

Для решения задачи IS воспользуемся результатами, полученными в работах $[1-4]$. Так, в работе $[1]$ для уравнения (1) методом Римана получено решение задачи Дарбу в области H_1, которое за счет интегрального представления одной из заданных функций $[2,3]$ приобрело более простой вид, в силу чего может быть использовано для решения краевых задач в более сложных областях.

В области H_1 имеем:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x^\beta y^\beta}\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta}ds + \frac{1}{x^\beta y^\beta}\int_x^y N_1(s,z)s^{\alpha+\beta}ds + z^{-\gamma}f_1(x,y), (9)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\text{где: } \mathrm{U}(x,x+0,z)=\int_0^x T_1(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta}ds, (10)$$

$$N_1=\frac{1}{2}[T_1-\nu_1], \nu_1=\lim_{y\to x+0}(U_x-U_y). (11)$$

В области H_2 имеем:

$$U(x,y,z)=\frac{1}{x^\alpha y^\alpha}\int_0^x T_2(s,z)s^{2\alpha}ds+\frac{1}{x^\alpha y^\beta}\int_x^y N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds+z^{-\gamma}f_2(x,y), (12)$$

$$\text{где: } \mathrm{U}(x,x-0,z)=\int_0^x T_2(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\alpha}ds, (13)$$

$$N_2=\frac{1}{2}[T_2+\nu_2], \nu_2=\lim_{y\to x-0}(U_x-U_y). (14)$$

В области H_3 имеем:

$$U(x,y,z)=\int_0^x T_3(s,z)\frac{(-s)^{2\beta}ds}{(-x)^\beta y^\beta}+\int_x^y N_3(s,z)\frac{(-s)^{\alpha+\beta}ds}{(-x)^\alpha y^\beta}+z^{-\gamma}f_3(x,y), (15)$$

$$\text{где: } \mathrm{U}(x,-x+0,z)=\int_0^x T_3(s,z)\left(\frac{s}{x}\right)^{2\beta}ds, (16)$$

$$N_3=\frac{1}{2}[\nu_3-T_3], \nu_3=\lim_{y\to -x+0}(U_x+U_y). (17)$$

Решение уравнения (1), определяемое формулами (9), (12), (15) удовлетворяет условию задачи IS. Неизвестные функции $T_k, N_k, k=\overline{1,3}$ будем искать в классе функций, для которых выполняются:

Условие А. 1) $N_1(x,z)x^{\alpha+\beta}, N_2(x,z)x^{\alpha+\beta}, N_3(-x,z)(-x)^{\alpha+\beta}$,

$T_1(x,z)x^{2\beta}, T_2(x,z)x^{2\alpha}, T_3(-x,z)(-x)^{2\beta}$ непрерывны в области D вместе со своими частными производными по переменной z и абсолютно интегрируемы по x на сегменте $[0,h]$ при любом $z\in[0,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{y\to 0} y^{\beta-\alpha}\int_0^y T_2(s,z)s^{2\alpha}ds=0.$

При этом на заданные функции налагаются следующие

Условия I. 1) $f_k(x,y)\in C(\overline{D_k}), k=\overline{1,3}, \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x\partial y}\in C(D_k)$;

$f_1(0,y)=f_3(0,y)=f_1(x,x)=f_2(x,x)=f_2(x,0)=f_2(h,y)=0,$

причем f_1 при $x=0$ обращается в ноль порядка выше $z_1-\alpha$, а f_3 порядка выше $z_2-\alpha$.

2) $\int_0^y [z_1t^{-z_1+\alpha-1}f_1(t,y)+z_2t^{-z_2+\alpha-1}f_3(-t,y)]\,\mathrm{dt}=0, \quad \int_{-y}^0 t^\alpha f_3(t,0)dt=0.$

Условия II. 1) Имеют место представления $\psi(x,z)=x^{\varepsilon_1}\psi^*(x,z)$;

$\varphi(x,z)=x^{1-3\alpha-3\beta+\varepsilon_2}\varphi^*(x,z), (\psi^*,\varphi^*)\in C(\overline{D_0})\cup C(D_0), 0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1.$

2) $\psi(h,z)=0.$

Условия III. $\sigma(x,z)\in C(\overline{D_0})\cup C^{(1)}(D_0)$. Имеет место оценка:

$\sigma(x,z)<\left(\frac{h}{x}\right)^\alpha, \sigma(0,z)\neq 0, \sigma(h,z)=0$ (ноль порядка меньше единицы).

Условия IV. Коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенству $\alpha>2\beta$. Исходя из условий (3), (4) задачи IS получаем следующие соотношения для неизвестных функций:

$$\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds+\frac{\sigma(x,z)x^{\beta-\alpha}}{h^\alpha}\int_0^x T_2(s,z)s^{2\alpha}ds+$$

$$+\frac{\sigma(x,z)}{h^\alpha}\int_0^x N_2(s,z)s^{\alpha+\beta}ds=\psi(x,z), (18)$$

$$-\int_{-y}^0 T_3(x,z)(-s)^{2\beta}ds+y^{1+2\beta}N_3(-y,z)=y^{\beta-\alpha}\left[\varphi(y,z)y^\beta\right]_y'. (19)$$

Сопряжение на плоскости $y=x$ (5), (6), с учетом представлений (10), (11), (13), (14), приводит к равенствам:

$$\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta}ds=\int_0^x T_2(s,z)s^{2\beta}ds, (20)$$

$$N_1(x,z)x^{2\beta} = N_2(x,z)x^{2\beta}.(21)$$

Из условий сопряжения на плоскости $x = 0$, после ряда тождественных преобразований, получаем:

$$N_1(y,z) = N_3(-y,z),(22)$$

$$-N_1(y,z)y^{-z_1+\alpha+\beta} + z_1 y^{-z_1+\alpha-\beta-1}\int_0^y T_1(s,z)s^{2\alpha}ds =$$

$$= N_3(-y,z)y^{-z_2+\alpha+\beta} - z_2 y^{-z_2+\alpha-\beta-1}\int_{-y}^0 T_3(s,z)(-s)^{2\alpha}ds.(23)$$

Равенство (18) рассмотрим как уравнение относительно $N_2(x,z)x^{\alpha+\beta}$, единственное решение которого, при условии $\sigma(h,z) = \psi(0,z) = 0$, полученное методом последовательных приближений имеет вид [5]:

$$N_2(x,z)x^{\alpha+\beta} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^\alpha F_1(x,z)}{h^\alpha - \sigma(x,z)x^\alpha}\right],(24)$$

$$F_1(x,z) = x^\alpha\psi(x,z) - \frac{\sigma(x,z)x^\beta}{h^\alpha}\int_0^x 2(s,z)s^{2\alpha}ds.(25)$$

С учетом равенства (21) аналогичное выражение получаем для $N_1(x,z)x^{2\beta}$. Кроме того, из формулы (20) имеем:
$\mathrm{T}_1 x^{2\beta} = \mathrm{T}_2 x^{2\beta}.(26)$

Соотношения (19), (21) – (23), (24), (26) приводят к уравнению относительно $T_1 s^{2\beta}$ $\left(T_1 s^{2\beta}\right)$:

$$T_1(x,z)x^{2\beta} + \mathrm{H}(x,z)\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta} = \mathrm{H}(x,z).(25)$$

Свободный член уравнения (25) $\mathrm{H}(x,z)$ содержит производные функций$\varphi(x,z),\psi(x,z)$. В выражение $\mathrm{H}(x,z)$ входит функция $\sigma(ч,z)$ и дробные степени x. В силу громоздкости их записи мы не приводим. Отметим только, что при выполнении условий II имеет место представление

$$\mathrm{H}(x,z) = x^{\alpha-\beta-1+\varepsilon}(h-x)^{-\varepsilon_3}f^*(x,z), 0 < \varepsilon < \varepsilon_3 < 1,\ f^* \in C(\overline{D_0}).$$

Единственное решение уравнения (25), полученное методом последовательных приближений, имеет вид:

$$T_1(s,z)s^{2\beta} = -\mathrm{H}(x,z)\int_0^x f(t,z)e^{-\int_t^x \mathrm{H}(y,z)dy}dt + f(x,z).(26)$$

Вычисления показываем, что при выполнении условий III – IV $T_1 x^{2\beta}$ принадлежат классу, указанному в условиях А. Из формулы (26) получаем вычислением

$$\int_0^x T_1(s,z)s^{2\beta}ds = \int_0^x T_2(s,z)s^{2\beta}ds = f(t,z)e^{-\int_t^x \mathrm{H}(y,z)dy}dt\ (27)$$

Подставляя выражение (27) в формулы (25), (26) найдем $N_2 x^{\alpha+\beta}, N_2 x^{\alpha+\beta}$. Посредством (22) вычисляем функцию $N_3(-y,z)$ из формулы (19) находим $\int_{-y}^0 T_3(s,z)(-s)^{2\beta}ds$. Результаты вычислений подставляем в выражения (9), (12), (15), получаем в явном виде решение задачи IS, однако, в силу громоздкости, мы их не приводим.

Единственность решения задачи следует из, взятого за основу, единственности решения задачи Дарбу и однозначной разрешимости интегральных уравнений, появляющихся в процессе решения. Существование доказано проверкой.

Исследованием показано, что решение задачи IS непрерывно на множестве $\underline{O}$ вместе со всеми частными производными, входящими в уравнение (1). На внутренней плоскости $x = 0$ имеет место особенность порядка α, на $y = x$ – разрыв первого рода. На граничных плоскостях $x = h, y = -x, y = h$ решение непрерывно, на $y = 0, z = 0$ имеет особенность порядка β и γ соответственно.

Литература:

1.Захаров В. Н. Краевая задача для одного уравнения вырождающегося на координатных плоскостях // Доклады 52-ой научной конференции СГПУ./ - Самара, 1998. – С.49 – 53.

2.И. Н. Родионова. Задача с интегральным условием для одного пространственного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на координатных плоскостях. // Вестник Самарского государственного технического университета серия «Физико – математической науки». / - Самара, 2017. – № 2 (23) – С. 189 - 193.

3., М. В. Долгополов, И. Н. Родионова. Две задачи для пространственного аналога гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник самарского государственного технического университета, серия «Физико – математической науки». / Самара, 2012. Т. 21, № 4 (29). - С. 212 – 217.

4.С. В. Бушков, И. Н. Родионова. Нелокальные задачи для одного уравнения гиперболического типа третьего порядка, вырождающегося на координатных плоскостях // Science Time. / Казань, 2016. - № 2(26). – С. 92 – 100.

5.С.Г. Михлин. Интегральные уравнения. // ОГИЗ./ - Москва, 1947.