ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Видоизменённая задача Гурса для обобщенного однопараметрического уравнения Эйлера – Дарбу

Васильева Ольга Альбертовна, кандидат физико-математических наук, доцент
Родионова Ирина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва

Аннотация. *На множестве, представляющем характеристический треугольник обобщенного однопараметрического уравнения Эйлера – Дарбу получено в явном виде решения краевой задачи с граничными условиями, заданными на половинах характеристик, ограничивающих множество.*
Ключевые слова. *Уравнение гиперболического типа, краевая задача, интегральное уравнение.*

Уравнение $U_{xy} + \frac{a(x,y)}{(sgnx)x-(sgny)y} = 0, (1)$
где $a(x,y) = \begin{cases} \beta U_x, (x,y) \in D_k, k = 0,1, \beta > 0; \\ -\beta U_x, (x,y) \in D_m, m = 2,3. \end{cases}$

Рассмотрим на множестве $H = \bigvee_{i=0}^{3} D_i$:
$D_0 = \{(x,y)|0 < -x < y < 1\}, D_1 = \{(x,y)|0 < x < y < 1\},$
$$D_2 = \{(x,y)|0 < y < x < 1\}, D_3 = \{(x,y)|0 < -y < x < 1\}.$$

Множество H представляет собой характеристический треугольник уравнения (1), ограниченный характеристиками $x = 1\ (-1 \le y \le 1), y = 1(-1 \le x \le 1)$ и линией сингулярности $x = -y$ коэффициента уравнения. На множестве H ставится для уравнения (1) задача с краевыми условиями на половинах характеристик $x = 1\ (-1 \le y \le 0), y = 1(-1 \le x \le 0)$, ограничивающих область H, а так же с условиями сопряжения на внутренних характеристиках $x = 0, y = 0$ и на нехарактеристической линии сингулярности $x = y$, находящейся внутри расстраиваемого множества H. Поставленную задачу можно считать обобщенной задачей Гурса.

Задача G. На множестве H найти решение U_{xy} уравнения (1), непрерывное в $\bar{\bar{H}}$, удовлетворяющее граничным условиям

$U(1,y) = \varphi_1(y), -1 \le y \le 0, (2)$
$U(x,1) = \varphi_2(x), -1 \le x \le 0, (3)$

условиям сопряжения на линиях $x = y$.
$$\lim_{y \to x+0} U_x(y-x)^{-\beta} = \lim_{y \to x-0} U_y(x-y)^{-\beta}, (4)$$
на характеристике $x = 0$:
$$\lim_{x \to 0+0} k_1 \int_y^x U_t(t,y)(y-t)^{1-\alpha} + f_1(y) = -\lim_{x \to 0-0} \int_{-x}^{y} U(x,t)(y-t)^{\gamma} dt, (5)$$
и на $y = 0$:
$$\lim_{y \to 0+0} k_2 \int_y^x U_t(x,t)(x-t)^{\gamma} + f_2(x) = \lim_{y \to 0-0} \int_{-x}^{y} U(t,y)(x-t)^{\alpha-1} dt, (6)$$
$$0 < \alpha < \gamma < 1.$$
k_1, k_2 – постоянные, которые определяем в ходе решения задачи.

Условия, налагаемые на заданные функции $\varphi_k, f_k, k = 1,2$ так же будут сформированы позже.

За основу решения поставленной задачи возьмем решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в каждом из четырех характеристических треугольников $D_m, m = \overline{0,3}$ [1].

Имеем в D_0: $U(x,y) = \tau_0(y) - \int_{-x}^{y} \nu_0(t)(y-t)^{\beta} dt\ (7)$
$$\nu_0(y) = \lim_{y \to -x+0} U_x(y+x)^{-\beta},\ \tau_0 = U(-y,y), (0 \le y \le 1);\ (8)$$
Имеем в D_1: $U(x,y) = \tau_1(y) - \int_{x}^{y} \nu_1(t)(y-t)^{\beta} dt\ (9)$
$$\nu_1(y) = \lim_{y \to x+0} U_x(y-x)^{-\beta},\ \tau_1(y) = U(y,y), (0 \le y \le 1);\ (10)$$
Имеем в D_2: $U(x,y) = \tau_2(x) - \int_{y}^{x} \nu_2(t)(x-t)^{\beta} dt, (11)$
$$\nu_2 = \lim_{y \to x-0} U_y(x-y)^{-\beta}, \tau_2 = U(x,x), (0 \le x \le 1);\ (12)$$
Имеем в D_3: $U(x,y) = \tau_3(x) - \int_{-y}^{x} \nu_3(t)(x-t)^{\beta}\ (13)$
$$\nu_3 = \lim_{y \to -x+0} U_y(x+y)^{-\beta}, \tau_3 = U(x,-x), (0 \le x \le 1). (14)$$

Неизвестные функции $\tau_k, \nu_k\ (k = \overline{0,3})$ будем искать в классе функций непрерывно дифференцируемых на соответствующих промежутках. В этом случае, как показано в работе [1], формулы (7), (9), (11), (13) определяют классическое решение уравнения (1) в соответствующих областях.

Из условий (2), (3), формул (7), (13) находим ν_0, ν_3, которые подставляем в формулы решения:
в D_0: $U(x,y) = \tau_0(y) + \int_{-x}^{y} \varphi_2'(-t)(1-t)^{\beta}(y-t)^{-\beta} dt, (14)$
в D_3: $U(x,y) = \tau_3(x) + \int_{-y}^{x} \varphi_1'(-t)(1-t)^{\beta}(x-t)^{-\beta} dt. (15)$

Из условий непрерывности искомого решения на характеристиках $y = 0, x = 0$ получаем соотношения:

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\tau_2(x)-\int_0^x \nu_2(t)(x-t)^\beta dt=\tau_3(x)+\int_0^x \varphi_1{}'(-t)(x-t)^\beta(1-t)^{-\beta}dt, \ (16)$$

$$\tau_0(y)+\int_0^y \varphi_2{}'(-t)(1-t)^{-\beta}(y-t)^\beta dt=\tau_1(y)-\int_0^y \nu_1(y-t)^\beta dt, (17)$$

С учетом непрерывности решения на линии $y=x$ и условиями сопряжения (4) имеем:

$$\tau_1(x)=\tau_2(x), (18)$$
$$\nu_1(x)=-\nu_2(x). (19)$$

Принимая во внимание одинаковое изменение переменных x и y, а так же неравенства (18), (19) сложим соотношения (16), (17), затем из (16) вычтем соотношение (17):

$$2\tau_1(x)=\tau_0(x)+\tau_3(x)+\int_0^x [\varphi_2'(-t)+\varphi_1'(-t)](1-t)^{-\beta}(x-t)^\beta dt, (20)$$

$$\int_0^x \nu_1(t)(x-t)^\beta dt=\frac{\tau_3(x)-\tau_0(x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x [\varphi_1'(-t)-\varphi_2'(-t)](1-t)^{-\beta}(y-t)^\beta dt. (21)$$

Из условий (5), (6) имеем:

$$-\int_0^y \tau_0(s)(y-s)^{-\gamma}ds-\mathrm{B}(1-\gamma,1+\beta)\int_0^y \varphi_2'(-t)(1-t)^{-\beta}(y-t)^{1-\gamma+\beta}dt=$$
$$=k_1\int_0^y \nu_1(t)(y-t)^{1-\alpha+\beta}dt+f_1(y), (22)$$

$$\int_0^y \tau_3(y)(y-s)^{\alpha-1}ds+\mathrm{B}(\alpha,1+\beta)\int_0^y \varphi_1'(-t)(1-t)^{-\beta}(y-t)^{\beta+\alpha}dt=$$
$$=k_2\int_0^y \nu_1(t)(y-t)^{\beta+\gamma}dt+f_2(y). (23)$$

Применяя к обеим частям неравенства (21) соответствующие операторы, находим $\int_0^y \nu_1(t)(y-t)^{1-\alpha+\beta}dt, \int_0^y \nu_1(t)(y-t)^{\beta+\gamma}d\,t$.

Результаты подставляем в формулы (22), (23), после чего к обеим частям полученных тождеств применяем соответственно операторы дробного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \dots(y-t)^{\gamma-1}dt, \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \dots(y-t)^{-\alpha}dt,$

После ряда вычислений получаем

$$-\tau_0=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^y \frac{\tau_3(s)-\tau_0(s)}{2}(y-s)^{\gamma-\alpha-1}+F_1(y), (24)$$

$$\tau_3=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^y \frac{\tau_3(s)-\tau_0(s)}{2}(y-s)^{\gamma-\alpha-1}+F_2(y). (25)$$

Отметим, что постоянным k_1, k_2 в условиях (5), (6) в процессе вычисления были приданы значения $k_1=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}, k_2=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}$, чтобы получить в уравнениях (24), (25) равные коэффициенты $\lambda=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\beta)}$. $F_1(y), F_2(y)$ - свободные члены уравнений (24), (25), содержащие заданные функции $\varphi_k, f_k, k=1{,}2$. В силу громоздкости выражений их пока не выписываем.

Складывая и вычитая равенства (24), (25), вводя обозначения $\tau_3(y)+\tau_0(y)=\Sigma(y)$, $F_2(y)+F_1(y)=F(y)$, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со слабополярным ядром

$\tau(y)=\lambda\int_0^y \tau(s)(y-s)^{\gamma-\alpha-1}ds-F(s)$ (26)

и алгебраическому уравнению $\tau_3(y)+\zeta_0(y)=\ F_2(y)+F_1(y)$. (27)

Единственное решение уравнения (26) имеет вид [2]:

$$\tau(y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \mathrm{E}_{\gamma-\alpha}\left[\frac{(y-t)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\beta)}\right]F(t)dt, (28)$$

$$\text{где } \mathrm{E}_{\gamma-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(y-t)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\beta)}\right]\frac{1}{\Gamma((\gamma-\alpha)k+1)} \ (29)$$

- функция Миттаг – Лефлера.

Приводя вычисления, с учетом выражений для $F_1(y), F_2(y)$, получим решения системы (26), (27):

$$\tau_0(y) = -\int_0^y \varphi_2'(-t)(1-t)^{-\beta}(y-t)^{\beta}dt + \frac{1}{2\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}\int_0^y f_2'(t)(y-t)^{-\alpha}dt - $$
$$-\frac{1}{2\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\int_0^y f_1'(t)(y-t)^{\gamma-1}dt - \frac{1}{2}[\mathrm{I}_1(y)+\mathrm{I}_2(y)], (30)$$
$$\tau_3(y) = -\int_0^y \varphi_1'(-t)(1-t)^{-\beta}(y-t)^{\beta}dt + \frac{1}{2\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}\int_0^y f_1'(t)(y-t)^{-\alpha}dt - $$
$$-\frac{1}{2\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\int_0^y f_1'(t)(y-t)^{\gamma-1}dt + \frac{1}{2}[\mathrm{I}_1(y)+\mathrm{I}_2(y)], (31)$$

в котором введем обозначения:

$$\mathrm{I}_1(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^y f_1'(t)(y-t)^{\gamma-1}dt\, \mathrm{E}_{\gamma-\alpha}{}^{\gamma}[(y-t)]dt, (32)$$
$$\mathrm{I}_2(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y (y-t)^{-\alpha}f_2'(t)\, \mathrm{E}_{\gamma-\alpha}{}^{1-\alpha}[(y-t)]dt, (33)$$
$$\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{\gamma}[(y-t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(y-t)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\beta)}\right]^k \frac{1}{\Gamma(k(\gamma-\alpha)+\gamma)}, (34)$$
$$\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{1-\alpha}[(y-t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(y-t)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\beta)}\right]^k \frac{1}{\Gamma(k(\gamma-\alpha)+1-\alpha)}. (35)$$

Из формулы (20) находим

$$\tau_1(y) = \tau_2(y) == \frac{1}{2\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}\int_0^y f_2'(t)(y-t)^{-\alpha}dt - $$
$$\frac{1}{2\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\int_0^y f_1'(t)(y-t)^{\gamma-1}dt \; (36)$$

$\nu_1(x) = -\nu_2(x)$находим из соотношения $\int_0^x \nu_1(t)(x-t)^{\beta} = \frac{1}{2}[\mathrm{I}_1(y)+\mathrm{I}_2(y)]$, дифференцируя и применяя к обеим частям, оператор $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \dots (x-t)^{-\beta}dt$:

$$\nu_1(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x [\mathrm{I}_1(t)+\mathrm{I}_2(t)]'(x-t)^{-\beta}dt = \nu_2(x). (37)$$

Чтобы получить в явном виде решение задачи ς надо подставить найденные значения $\tau_{k,}k=\overline{0,3}, \nu_1, \nu_2$ в формулы (14), (15), (9), (11), затем произвести проверку и вычислить, какие условия налагаются на заданные функции. Вычисление показано, что от функций $\varphi_m(m=1,2)$ достаточно требовать непрерывной дифференцируемости на сегменте $[-1,0]$ и условия $\varphi_m(-1)=0$. Функции $f_m(x)$, кроме непрерывной дифференцируемости, должны быть такими, чтобы выполнялись условия $\tau_0(1)=\tau_3(1)=0$, т.е:

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}\int_0^1 f_2'(t)(1-t)^{-\alpha}dt - $$
$$-\frac{1}{\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\int_0^1 f_1'(t)(1-t)^{\gamma-1}dt - \left(\mathrm{I}_1(1)+\mathrm{I}_2(1)\right) = 0, (38)$$
$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}\int_0^1 f_2'(t)(1-t)^{-\alpha}dt - $$
$$-\frac{1}{\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\int_0^1 f_1'(t)(1-t)^{\gamma-1}dt + \mathrm{I}_1(1)+\mathrm{I}_2(1) = 0. (39)$$

Для построения примера функций, удовлетворяющих условиям (38), (39) будем исходить из свойства симметрии бета – функции $\mathrm{B}(\alpha,\beta)-\mathrm{B}(\beta,\alpha)=0$.

Вычислением легко проверяется, что функции

$$f_1'(t) = \frac{[t^m(1-t)^{n+1-\gamma} - t^n(1-t)^{m+1-\gamma}]\left(1-\Gamma(1-\alpha)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{1-\alpha}[(1-t)]\right)}{\left[\Gamma(1-\alpha)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{1-\alpha}+\Gamma(\gamma)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{\gamma}[(1-t)]\right]}$$
$$f_2'(t) = \frac{\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)}{\mathrm{B}(\gamma,1-\gamma)}\frac{[t^m(1-t)^{n+\alpha} - t^n(1-t)^{m+\alpha}]\left(1-\Gamma(\gamma)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{\gamma}\right)}{\left[\Gamma(1-\alpha)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{1-\alpha}+\Gamma(\gamma)\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{\gamma}\right]}$$

удовлетворяют условиям (38), (39). $\mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{1-\alpha}(1-t), \mathrm{E}_{\gamma-\alpha}^{\gamma}(1-t)$ определяются формулами (35), (34) соответственно. Из сказанного выше следует, что при выполнении условий, налагаемых на заданные функции φ_k, f_k $(k=1,2)$ задача $\bar{G}$ для уравнения (1) имеет единственное решение. Единственность следует из однозначной разрешимости видоизмененной задачи Коши для уравнения (1), взятой за основу, однозначной разрешимости системы уравнений, к которым свелась задача $\bar{\varsigma}$. Осуществление доказано непосредственной проверкой.

Отметим, что данная работа является продолжением исследований по постановке и решению краевых задач для гиперболических уравнений в сложных областях, начатых в работах $[3-5]$.

Литература:

1.В. Ф. Волкодавов, Н. Я. Николаев. Краевые задачи для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Куйбышевский государственный педагогический институт имени Куйбышева./ - Куйбышев, 1984. – С. 79.

2.С.Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Наука и техника./ - Минск, 1987. – С. 680.

3.С. В. Бушков, И. Н. Родионова. О постановке краевых задач для уравнения Эйлера - Дарбу в области, содержащей две линии сингулярности коэффициентов уравнения //. Сборник по результатам III международной конференции «О вопросах и проблемах современных математических наук». / - Челябинск, 2016. – С. 10 – 16.

4.И. Н. Родионова, М. В. Долгополов. Дельта – задачи для обобщенного уравнения Эйлера – Дарбу // Вестник самарского государственного технического университета, серия «Физико – математической науки». / Самара, 2017. Т. 21, №3. - С. 417 – 422.

5.И. Н. Родионова, С. В. Бушков. Задачи с локальными и интегральными условиями для уравнения гиперболического типа третьего порядка, вырождающегося на координатных плоскостях // Евразийское научное объединение. Стратегии устойчивого развития мировой науки. XXXIX международная научная конференция. / Москва, 2018.