www.esa-conference.ru

Об асимптотическом поведении решений возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с иррегулярной особой точкой

Туркманов Жылдызбек Каныбекович Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и математики
факультета журналистики и информационных систем;
Карынбаева Миргул Муратбековна, старший преподаватель кафедры информатики и математики факультета журналистики и информационных систем
БГУ им. К.Карасаева г.Бишкек

Аннотация. *В данной статье рассматривается возмущенные дифференциальные уравнения с иррегулярной особой точкой. Изучается асимптотическое поведение решения этих уравнений включительно до особой точки. Излагается метод униформизации.*

Ключевое слова: *Особая точка, малый параметр, постоянная, коэффициенты, невозмущенная задача, отрезок, степень, равенство, метод униформизации, корень уравнения, функция, неравенства.*

On the asymptotic behavior of solutions of perturbed ordinary differential equations of the first order with an irregular singular point

Turkmanov Jyldyzbek Kanybekovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Informatics and Mathematics
of the Faculty of Journalism and Information Systems;
Karynbaeva Mirgul Muratbekovna, Senior Lecturer of the Department of Informatics and Mathematics of the Faculty of Journalism and Information Systems
BSU them. K. Karasaeva, Bishkek

Abstract. *This article discusses perturbed differential equations with an irregular singular point. The asymptotic behavior of the solution of these equations is studied up to the singular point. The method of uniformization is described.*

Keywords: *Singular point, small parameter, constant, coefficients, unperturbed problem, segment, degree, equality, uniformization method, root of an equation, function, inequalities.*

DOI: *10.5281/zenodo.5497593*

Рассмотрим задачу Коши

$$\left(x^2 + \varepsilon u(x)\right)u'(x) = -q(x)u(x) + r(x), u(1) = u^0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $u^0 -$ заданная постоянная, $q(x), r(x) \in C^\infty[0,1]$.

Невозмущенная задача имеет вид:

$$Lu_0 := x^2 u_0'(x) + q(x)u_0(x) = r(x), u_0(1) = u^0 \tag{2}$$

и ее решение представляется в виде

$$u_0(x) = x^{-b}e^{q_0/x}\left(w(x) + Q(x)\right), b = q'(0), \; w(x) = \mathrm{P}(x)w_0, \tag{3}$$

$$P(x) = exp\left\{-\int\limits_1^x (q(s) - q_0 - bs)s^{-2}\, ds\right\},$$

где $w(x), Q(x) \in C^\infty[0,1]$ и $|Q(x)| \le Nx$.

Пусть, далее $w_0 \neq 0$ и $q_0 > 0$

Если решать задачу (1) методом малого параметра в виде

$$u = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \cdots + \varepsilon^n u_n(x) + \cdots \tag{4}$$

тогда

$$u(x) \sim e^{q_0/x} \cdot x^{-b}\left[w_0 + A_1 \varepsilon e^{q_0/x} x^{-b-2} + \cdots + A_n\left(\varepsilon x^{-b-2}e^{q_0/x}\right)^n + \cdots\right]$$

Здесь $A_j = const$ и ряд сходится на отрезке $[x_0, 1]$, где $x_0 -$ решение уравнение

$$\varepsilon x_0^{-b-2}e^{q_0/x} = A \; (0 < A = const)$$

Решая это уравнение, имеем

$$x_0 = \left\{\frac{1}{q_0} \cdot ln\left[\frac{A}{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{q_0}\ln\frac{A}{\varepsilon}\right)^{-2-b}\right]\left(1 + \mathrm{o}(1)\right)^{-1}\right\}$$

Продолжение решения задачи (1) на отрезок $[0, x_0]$ методом малого параметра затруднено, поэтому к задаче (1) применим метод униформизации.

Вместо (1) рассмотрим униформизованную задачу

$$\begin{cases} \xi^2 u'(\xi) = -q\left(x(\xi)\right)u(\xi) + r\left(x(\xi)\right), u(1) = u^0 \\ \xi^2 x'(\xi) = x^2 + \varepsilon u, x(1) = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Невозмущенная задача $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\xi^2 x_0' = x_0^2, x_0(1) = 1$$
$$Lu_0(\xi) = \xi^2 u_0'(\xi) + q(\xi)u_0(\xi) = r(\xi), u_0(1) = u^0$$

и ее решение представляется в виде (3), где $x = \xi$ и поэтому $u_0(\xi) \sim w_0 \xi^{-b} e^{q_0/\xi}$ $(\xi \to 0)$;

$$|u_0(\xi)| \le a\xi^{-b} e^{q_0/\xi} \qquad (6)$$

Решение задачи (5) ищем в виде:

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \cdots,$$
$$x = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots. \qquad (7)$$

Для определения $x_j(\xi)$ и $u_j(\xi)$ имеем

$$Lu_1 = r_1(\xi)x_1 - q_1(\xi)x_1(\xi)u_0(\xi), u_1(1) = 0,$$
$$L_1 x_1 := \xi^2 x_1(\xi) - 2\xi x_1(\xi) = u_0(\xi), x_1(1) = 0$$
$$Lu_2 = -q_1 x_2 u_0 - q_2 x_1^2 u_0 - q_1 x_1 u_1 + r_1 x_2 + r_2 x_1^2, u_2(1) = 0,$$

$L_1 x_2 = x_1^2 + u_1,\ x_1(1) = 0; \dots$.

Из этих уравнений единственным образом определяется $x_j(\xi), u_j(\xi)$ $(j = 1,2, \dots)$. При этом можно показать, что при $\xi \to 0$.

$$x_n(\xi) \sim b_n \xi^{-nb} e^{nq_0/\xi},$$
$$u_n(\xi) \sim c_n \xi^{-(n+1)b} \cdot e^{(n+1)q_0/\xi},$$

где $b_n, C_n - const$. Таким образом

$$u(\xi) \sim \xi^{-b} e^{q_0/\xi} \left(w_0 + C_1 \varepsilon \xi^{-b} e^{q_0/\xi} + \cdots + C_n \varepsilon^n \xi^{-bn} e^{nq_0/\xi} + \cdots\right)$$
$$x \sim \xi + b_1 \varepsilon \xi^{-b} e^{q_0/\xi} + \cdots + b_n \varepsilon^n \xi^{-bn} e^{nq_0/\xi} + \cdots.$$

Вообще говоря, отсюда следует, что ряды (7) сходится на отрезке $[\xi_0, 1]$, где ξ_0 – корень уравнения.

$$\varepsilon \cdot \xi_0^{-b} e^{q_0/\xi_0} = C, 0 < C - const.$$

Докажем этот факт.

В (5) сделаем подстановку $x = \xi + \varepsilon g(\xi)$, тогда

$$\begin{cases} \xi^2 u'(\xi) = r(\xi + \varepsilon g) - r(\xi) + r(\xi) - q(\xi)u(\xi) + [q(\xi) - q(\xi + \varepsilon g)]u(\xi), \\ \xi^2 g'(\xi) - 2\xi g + \varepsilon g^2 + u(\xi), u(1) = u^0, g(1) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Из второго уравнения системы (8) имеем

$$g(\xi) = \xi^2 \int_1^\xi S^{-4} \left(u(s) + \varepsilon g^2(s)\right) ds \qquad (9)$$

Рассмотрим множество функций $u(\xi, \varepsilon)$ аналитических по ε и удовлетворяющих условию

$$|u(\xi)| \le \frac{3}{2} a\xi^{-b} e^{q_0/\xi} \qquad (10)$$

при ξ малом.

Существует постоянная M_1, такая, что для $\forall \alpha \in \mathrm{R}$

$$\int_\xi^1 S^{-\alpha-2}\, e^{q_0/s}\, ds \le M_1 e^{q_0/\xi} \cdot \xi^{-\alpha} \qquad (11)$$

Если $\alpha \ge 0$, то $M = 1/q_0$; если $\alpha < 0$, то $M_1 = \frac{1}{q_0}\left(1 - \frac{2\alpha}{q_0} + \frac{\alpha^2}{q_0}\right)$.

В силу (10) и (11) из (9) имеем

$$|g(\xi)| \le a_0 \xi^{-b} e^{q_0/\xi} + \varepsilon \int_\xi^1 S^{-2}\ |g(s)|^2 ds, a_0 = 3aM_{1/2} \qquad (12)$$

Вводим функцию $z(\xi) = \xi^b e^{-q_0/\xi} |g(\xi)|$, тогда из (12) имеем

$$z(\xi) \le a_0 + \varepsilon M_1 \int_\xi^1 S^{-2-b} \cdot e^{q_0/s} \cdot z^2(s)\, ds$$

Решение этого неравенства мажорируется решением задачи

$$z'(\xi) = -M_1 \varepsilon \xi^{-b-2} \cdot e^{q_0/\xi} \cdot z^2(\xi), z(1) = a_0$$

Решение этой задачи будет аналитической функцией по ε на отрезке $[\rho, 1]$, где ρ – корень уравнения

$$3M_1^3 \cdot a\varepsilon\rho^{-b-2} \cdot e^{q_0/\rho} = 1 \qquad (13)$$

при этом $z(\xi) \le 2a_0$. Возвращаясь к $g(\xi)$, имеем

$$|g(\xi)| \le 2a_0 \xi^{-b} e^{q_0/\xi} \qquad (14)$$

при малом ξ. Из первого уравнения системы (8) переходим к интегральному уравнению

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \xi^{-b} e^{q_0/\xi} \int_1^\xi \rho(\xi - s) e^{-q_0/s} \cdot s^{b-2} [r(s + \varepsilon g(s)) - r(s) + (q(s) - q(s + \varepsilon g(s)) u(s)]\, ds \qquad (15)$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$|P(\xi - s)| = N_1^2, |r(\xi + \varepsilon g) - r(\xi)| \le M\varepsilon |g(\xi)| / (1 - \varepsilon |g|),$$
$$|q(\xi + \varepsilon g) - g(\xi)| \le M\varepsilon |g|\ /\ (1 - \varepsilon |g|),$$

Из (15) при малом ξ получаем

$$|u(\xi)| \le a\xi^{-b} e^{q_0/\xi} + 2N_1^2 M\varepsilon \cdot e^{q_0/\xi} \cdot \xi^{-b} \cdot \int_\xi^1 S^{b-2}\, e^{-q_0/s} \frac{|g(s)| u(s)|}{1 - \varepsilon |g(s)|} ds, \qquad (16)$$

$V(\xi) = \xi^b e^{q_0/\xi} |u(\xi)|$ и учитывая (14) и (15) имеем

$$V(\xi) = a + \gamma_0 \varepsilon \int_\xi^1 S^{-b-2} e^{q_0/s} V(s)\, ds,$$

где $\gamma_0 = ba_0 N_1^2 \cdot M$. Опять, усиливая имеем

$$V(\xi) = a + \gamma_0 \cdot M_1 \cdot \varepsilon \xi^{-b} e^{q_0/\xi}.$$
$$\varepsilon \xi_0^{-b} \cdot e^{q_0/\xi_0} = 1, \gamma = 2\gamma_0 \cdot M_1 \qquad (17)$$

то корень $\xi_0 \in [\xi_0, 1]$.

Функция $V(\xi)$ будет аналитической по ξ и $V(\xi) \le 2a$. Возвращаясь к $u(\xi)$, имеем неравенство (10).

Отметим, что корни уравнений (13) и (17) выражаются в виде

$$\rho = \left\{\frac{1}{q_0}\ln\left[\frac{1}{M_2\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{M_2\varepsilon}\right)^{-(b+2)/q_0}\right] + o(1)\right\}^{-1} \quad (18)$$

$$\xi_0 = \left\{\frac{1}{q_0}ln\left[\frac{1}{\gamma\varepsilon}\left(ln\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right)^{-\frac{b}{q_0}}\right] + o(1)\right\}^{-1} \quad (19)$$

Отсюда видно, что $\xi_0 < \rho$. Считая $N_1, M \geq 1$, имеем

$$2\varepsilon|g(\xi)| \leq \frac{1}{2}, |R_1(\xi,\varepsilon)| \leq \gamma_1 \cdot M \cdot \varepsilon\xi^{-2b}e^{2q_0/\xi}, \quad (20)$$

$$R_1(\xi,\varepsilon) = u(\xi,\varepsilon) - u_0(\xi), \gamma_1 = 12M \cdot M_1 a \cdot a_0 N^2.$$

Пусть

$$\gamma_1\varepsilon \cdot \xi_1^{-b-1}e^{\xi_1/q_0} = N.$$

Из (15) имеем

$$e^{-q_0/\xi_1} \cdot \xi_1^b|u(\xi_1)| \geq |W_0| - R_2(\xi_1,\varepsilon), \quad (21)$$

где $R_2(\xi,\varepsilon) = |W(\xi) - W_0| + |Q(\xi)| + e^{-q_0/\xi} \cdot \xi^b|R_1(\xi,\varepsilon)|$.

В силу неравенство (20) получаем

$$|R_2(\xi,\varepsilon)| \leq 3N\xi_1$$

Пусть при 0< $\varepsilon \leq \xi_1$, $\xi_1 \leq |W_0|/6N$, тогда из (21) следует, что

$$|u(\xi_1)| \geq \xi_1^{-b}e^{-q_0/\xi}(W_0/2) \geq 1$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) $q(\xi)$, $r(\xi) \in C^\infty[0;1]$; 2) $W_0 \neq 0$. Тогда решения задачи (5) можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов (7) на отрезке $[\xi_0, 1]$.

Пусть далее W_0>0. Рассмотрим уравнение

$$x(\eta) := \eta - \varepsilon\eta^2\int_\eta^1 S^{-4}\left(u(s) + \varepsilon g^2(s)\right)ds = 0 \quad (22)$$

Обозначим через ρ_1 и ρ_2 корни уравнений

$\varepsilon w_0\rho_1^{-b-1}e^{q_0/q_1} = q_0$,

$\varepsilon w_0\rho_2^{-b-2}e^{q_0/q_2} = q_0$.

Тогда, точно так же, как [1] можно показать, что на отрезке $[\rho_{1/2}, \rho_2]$ уравнение (22) имеет единственный корень, причем

$$\eta \sim \rho_1 \sim \left\{\frac{1}{q_0}ln\left[\frac{q_0}{w_0\varepsilon}\left(ln\frac{q_0}{w_0\varepsilon}\right)^{-(b+1)/q_0}\right]^{-1}\right\}$$

Далее $x^2(\xi) + \varepsilon u(\xi) > 0$, $\xi \in [\eta, 1]$.

В самом деле, представляем $x(\xi)$ в виде

$$x(\xi) = \xi - \varepsilon T(\xi), T(\xi) = \xi^2\int_\xi^1 S^{-4}\left(u(s) + \varepsilon g^2(s)\right)ds,$$

Тогда $x^2(\xi) + \varepsilon u(\xi) = \xi^2 - \varepsilon T_1(\xi)$, $T_1(\xi) = 2\xi T(\xi) - \varepsilon T^2(\xi) + u(\xi)$. (23)

$$|\varepsilon T_1(\xi)| \leq \varepsilon N_2\xi^{-b}e^{q_0/\xi}, N_2 = const \quad (24)$$

В силу (10) и (14). Пусть $2\varepsilon N_2\xi_2^{-b-2}e^{q_0/\xi_2} = 1$, тогда в силу (23) и (24) на отрезке $[\xi_2, 1]$ выражение $x^2(\xi) + \varepsilon u(\xi) > 0$.

На отрезке $[\eta, \xi_2]$: $u(\xi) > 0$.

Это следует из оценок вида (21).

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 $W_0 > 0$. Тогда задачи (1) и (5) эквивалентны, т.е. решение задача (1) можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов (7).

Покажем пример

$$(x^2 + \varepsilon u)u'(x) = -au, u(1) = b > 0 \quad (25)$$

Запишем униформизованную задачу

$$\begin{aligned} \xi^2 u'(\xi) &= -\alpha u(\xi), u(1) = b \\ \xi^2 x'(\xi) &= x^2 + \varepsilon u(\xi), x(1) = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда имеем

$$u(\xi) = C \cdot e^{a/\xi}, C = b \cdot e^{-a},$$

$$x_1 = -\frac{c}{a}e^{a/\xi}\left(1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{2\xi^2}{a^2}\right) + \frac{c\xi^2}{a}\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}\right)e^a, x_2(\xi) = O\left(e^{2a/\xi}\right), \xi \to 0$$

Следовательно,

$$x = \xi - \frac{C\varepsilon}{a}e^{a/\xi}\left(1 + O(\xi)\right) + \varepsilon^2 O\left(e^{2a/\xi}\right).$$

Определяя η из уравнения

$$\eta = \frac{C\varepsilon}{a}e^{a/\eta}\left(1 + o(\eta) + \varepsilon^2 O\left(e^{2a/\eta}\right)\right)$$

имеем

$$\frac{a}{\eta} = ln\left[\frac{a^2}{C\varepsilon}\left(ln\frac{a^2}{C\varepsilon}\right)^{-1}\right] + O(1), \varepsilon \to 0$$

Подставляя значение η в $u(0) = Ce^{a/\eta}$ имеем $u(0) \sim a^2/\varepsilon ln(a^2/C\varepsilon)$ [2]

Литература:

1. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. - Бишкек: Илим, 1992-138с.
2. Carrier C.P. Boundary Laye Problems in applied mathematics // Comm. Appl. Math. – 1954. – v.7. – P. 11-17.

3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. – УМН, 1960, 15, №4, С. 27-95.

4. Туркманов Ж.К. Асимптотика решения возмущенного уравнения с иррегулярной особой точкой. //Материалы междунар. Научно- практ.конф. «Проблемы механики и прикладной математики», посв.памяти проф. Франкля Ф.И. Т.2. Прикл. матем. – Бишкек: Республ. высш. колледж, 1995 – Т.2.: Прикл.матем. – С.87-88.