www.esa-conference.ru

Возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения со слабой особенностью в случае иррационального показателя особой точки

Туркманов Жылдызбек Каныбекович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики и математики факультета журналистики и информационных систем;
Карынбаева Миргул Муратбековна, старший преподаватель кафедры информатики и математики факультета журналистики и информационных систем
БГУ им. К.Карасаева г.Бишкек

Аннотация. *Это такие возмущенные уравнения, что при нулевом значении малого параметра порядок уравнений не понижается, однако, у них возникает особая точка (в данной работе на левом конце области определения). Поэтому, для решения поставленной задачи применяем обычный метод малого параметра с последующим применением метода продолжения по параметру.*

Ключевое слова: *Особая точка, малый параметр, решение задачи, постоянная, невозмущенная задача, экспоненциальный член, ряд, коэффициенты, преобразование, условия, асимптотический ряд, отрезок, степень, равенство, уравнение, отображение, принцип математической индукции, утверждение, замкнутый шар.*

Perturbed ordinary differential equations with a weak singularity in the case of an irrational exponent of a singular point

Turkmanov Jyldyzbek Kanybekovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Informatics and Mathematics of the Faculty of Journalism and Information Systems;
Karynbaeva Mirgul Muratbekovna, Senior Lecturer of the Department of Informatics and Mathematics of the Faculty of Journalism and Information Systems
BSU them. K. Karasaeva, Bishkek

Abstract: *These are such perturbed equations that at zero value of the small parameter the order of the equations does not decrease, however, they have a singular point (in this work, at the left end of the domain of definition). Therefore, to solve the problem posed, we apply the usual method of a small parameter, followed by the method of continuation with respect to a parameter.*

Keywords: *Singular point, small parameter, problem solution, constant, unperturbed problem, exponential term, series, coefficients, transformation, conditions, asymptotic series, segment, degree, equality, equation, mapping, principle of mathematical induction, statement, closed ball.*

DOI: *10.5281/zenodo.5497588*

Сингулярно – возмущенные уравнения условно можно делить на два класса. К первому классу можно отнести сингулярно – возмущенные уравнения с малым параметром при старшей производной или уравнения типа Прандтля – Тихонова.

Ко второму классу относятся уравнения с особыми точками или типа Лайтхилла.

Для построения асимптотики решений таких уравнений были созданы следующие аналитические методы: метод структурного сращивания (развитие метода сращивания Ван – Дайка) [1-2], метод погранфункций, метод униформизации (развитие метода – Лайтхилла), метод усреднения, метод регуляризации Ломова, метод разных масштабов и др.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$Lu_\varepsilon := \left(x^\alpha + \varepsilon u(x)\right)u'(x) = q(x)u(x) + r(x), u(1) = u^0 \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, $0 < \alpha < 1, q(x), r(x) \in C^\infty[0,1]$, $u^0 -$ заданная постоянная.

Ставится задача Лайтхилла: Когда решение задачи (1) существует на отрезке [0,1], если существует найти асимптотику этого решения.

Невозмущенная задача ($\varepsilon = 0$), соответствующей задаче (1) имеет вид:

$$Lu_0(x) := x^\alpha u_0'(x) - q(x)u_0(x) = r(x), u_0(1) = u^0. \tag{2}$$

Для уравнения (2) точка $x = 0$ является слабой особой точкой. Решение задачи (2) представимо в виде:

$$u_0(x) = G(x)\left[u^0 + \int_1^x G^{-1}(s)S^{-\alpha}r(s)ds\right], \tag{3}$$

где

$$G(x) = exp\left\{\int_1^x S^{-\alpha}q(s)ds\right\} \tag{4}$$

Из (3) и (4) видно, что функция $u_0(x)$ определена на отрезке [0,1]. Для того, чтобы получить асимптотику решения возмущенной задачи, при $x \to 0$ преобразуем (3) в виде

$$u_0(x) = G_1(x)\left[w_0 + \int_0^x G_1^{-1}(s)S^{-\alpha}r(s)ds\right], \tag{5}$$

где

$$G_1(x) = exp\left\{\int_1^x S^{-\alpha}q(s)ds\right\} = exp\left\{x^{1-\alpha}\sum_{j=0}^\infty q_j^{(1)}x^j\right\}, q^{(1)} = q_j/(j+1-\alpha) \tag{6}$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$w_0 = w(0) = G(0)\left[u^0 + \int_0^1 G^{-1}(s)S^{-\alpha}r(s)ds\right] \quad (7)$$

Если предоставить экспоненциальный член в виде ряда по степеням x, то формулу (6) можно записать как

$$G_1(x) = 1 + x^{1-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} a_{ij}\, x^{(1-\alpha)i}x^j, \quad (8)$$

где a_{ij} – постоянные коэффициенты, не зависящие от x.

Подставляя (8) в (5) и группируя члены с одинаковыми степенями x из (5), получаем

$$u_0(x) = w_0 + x^{1-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(0)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j \sim w_0 + O(x^{1-\alpha})\ (x \to 0) \quad (9)$$

$$u_0'(x) = x^{-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} \bar{u}_{ij}^{(0)}\, x^{(1-\alpha)}\cdot x^j \sim O(x^{-\alpha})\ (x \to 0), \quad (10)$$

где $u_{ij}^{(0)}, \bar{u}_{ij}^{(0)}$ - постоянные коэффициенты, не зависящие от x.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) $0 < \alpha < 1, q(x), r(x)$ – разлагается в асимптотический ряд по степеням x на отрезке [0,1]; 2) $\lim\limits_{x\to 0} u_0(x) = w_0 \neq 0$. Тогда решение задачи (1) можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \cdots + \varepsilon^n u_n(x) + \cdots \quad (11)$$

на отрезке $[x_0(\varepsilon),1]$.

Доказательство. Подставляя (11) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обоих частях равенства, приходим к уравнениям:

$$Lu_1(x) = -\,u_0(x)u_0'(x), u_1(1) = 0, \quad (11.1)$$

$$Lu_2(x) = -\,u_0(x)u_1'(x) - u_1(x)u_0'(x), u_2(1) = 0, \quad (11.2)$$

$$\dots$$

$$Lu_n(x) = -\sum_{i+j=n-1} u_i(x)u_j'(x), u_n(1) \quad (11.n)$$

Учитывая (9) и (10), задача (11.1) запишется в виде:

$$Lu_1(x) = -\left(w_0 + x^{1-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(0)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j\right)\left(x^{-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} \bar{u}_{ij}^{(0)}\, x^{(1-\alpha)}\cdot x^j\right), u_1(1) = 0.$$

Отсюда группируя члены с одинаковыми степенями x и интегрируя последнее равенство, имеем

$$u_1(x) = x^{1-2\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(1)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j + A_1 + x^{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_j^{(1)}\cdot x^i, x \to 0 \quad (12.1)$$

где $A_1 = const$

$$u_1'(x) = x^{-2\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} \bar{u}_{ij}^{(1)}\, x^{(1-\alpha)i}\cdot x^j + x^{-\alpha}\sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_j^{(1)}\cdot x^j, x \to 0 \quad (12.2)$$

В силу равенств (9), (10), (12.1), (12.2) уравнение (11.2) перепишется в следующем виде:

$$Lu_2(x) = x^{-2\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} \bar{u}_{ij}^{(2)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j + x^{-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} \bar{u}_j^{(2)}\cdot x^i, u_2(1) = 0.$$

Отсюда имеем

$$u_2(x) = x^{1-3\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(2)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j + x^{1-2\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{j0}^{(2)}\cdot x^j + A_2 + x^{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{j1}^{(2)}\cdot x^j \quad (12.3)$$

где $A_2 = const$

Предположим, что $u_k(x)$ верно, т.е. имеет место равенство (($\forall\, k \in \mathrm{N}$).

$$u_k(x) = x^{1-(k+1)\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(k)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j + x^{1-k\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{j0}^{(k)}\cdot x^j + \ldots + x^{1-2\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{j(k-2)}^{(k)}\cdot x^j + A_k + x^{1-\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{j(k-1)}^{(k)}\cdot x^j, x \to 0 \quad (12.k)$$

Используя формулу (11. K+1), получаем

$$u_{k+1}(x) = x^{1-(k+2)\alpha}\sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij}^{(k+1)}\, x^{(1-\alpha)i}x^j + x^{1-(k+1)\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{jo}^{(k+1)}\cdot x^j + \cdots + x^{1-2\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{j(k-2)}^{(k+1)}\cdot x^j + A_{k+1} + x^{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_{jk}^{(k+1)}\cdot x^j, x \to 0 \quad (12.k+1)$$

где $A_{k+1} = const$

По принципу математической индукции заключаем, что утверждение $u_k(x) \to u_{k+1}(x)$ при $x \to 0$, верно при всех $k \in N$.

Следовательно, ряд (11) при $x \to 0$ имеет вид:

$$u(x,\varepsilon) = w_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots + \varepsilon^n A_n + \cdots + x^{1-\alpha}\left[u_{00}^{(0)} + u_{00}^{(1)}\varepsilon x^{-\alpha} + u_{00}^{(2)}(\varepsilon x^{-\alpha})^2 + \cdots + u_{00}^{n}(\varepsilon x^{-\alpha})^n + \cdots\right] \quad (13)$$

Отсюда видно, что этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $[x_0(\varepsilon),1]$, где $x_0 = \varepsilon^{(1-\beta)/\alpha}, 0 < \beta < 1$

$$u(x_0(\varepsilon),\varepsilon) = w_0 + O(\varepsilon^\delta), \quad (14)$$

где а) $\delta = (1-\alpha)\cdot(1-\beta)/\alpha$ при $\alpha > \frac{1}{2}$,

б) $\delta = 1$ при $\alpha < \frac{1}{2}\ \beta < (1-2\alpha)/(1-\alpha)$.

Чтобы продолжить решение на отрезок $\left[0, \varepsilon^{(1-\beta)/\alpha}\right]$ в (1) сделаем преобразование:

$$x = \varepsilon^{1/\alpha}\cdot\tau, u(x) = w_0 + V(\tau) \quad (15)$$

Тогда имеем

$$(\tau^\alpha + w_0 + V(\tau))dV/d\tau = \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left[q(\varepsilon^{1/\alpha}\tau)(w_0 + V(\tau)) + r(\varepsilon^{1/\alpha}\tau)\right] \quad (16)$$

В силу (14) и (15) для $V(\tau)$ получаем задачу Коши:

$$V(\tau_0) = O(\varepsilon^\delta) \equiv \omega_1(\varepsilon), \tau_0 = \varepsilon^{-\beta/\alpha}\ (\tau_0 \to \infty, \varepsilon \to 0) \quad (17)$$

Уравнение (16) эквивалентно интегральному уравнению

$$V(\tau) = w_1(\varepsilon) - \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha}\int_\tau^{\tau_0} F(S, V(s), \varepsilon)ds \equiv T_1 V, \quad (17.1)$$

где $F(\tau, V(\tau), \varepsilon) = \left(q(\varepsilon^{1/\alpha}\tau)(w_0 + V(\tau)) + r(\varepsilon^{1/\alpha}\tau)\right)/(\tau^\alpha + w_0 + V(\tau))$

Далее предполагаем, что $w_0 > 0$.

Берем замкнутый шар:

$$C_{w_1(\varepsilon)} = \{V: \|V(\tau)\| \leq 2\omega_1(\varepsilon)\}.$$

Тогда имеем

$$|F(\tau, V(\tau), \varepsilon)| \leq \big(M(w_0 + 2w_1(\varepsilon) + 1)/(\tau^\alpha + w_0)\big) \leq \frac{\gamma_1}{\tau^\alpha},$$

где $\gamma_1 = 2M(w_0 + 2w_1(\varepsilon) + 1)$, $\left|q\left(\varepsilon^{1/\alpha}\tau\right)\right|, \left|r\left(\varepsilon^{1/\alpha}\tau\right)\right| \leq M$.

$$|V(\tau)| \leq w_1(\varepsilon) + \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \int_\tau^{\tau_0} |F(S, V(s), \varepsilon)| ds \leq w_1(\varepsilon) + \gamma_1\, \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \int_\tau^{\tau_0} \frac{ds}{s^\alpha} \leq w_1(\varepsilon) + \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha}/(1-\alpha)|\tau_0^{1-\alpha} - \tau^{1-\alpha}| \leq$$
$$w_1(\varepsilon) + \gamma_1 e^{(1-\alpha)/\alpha}(1-\alpha)|\tau_0 - \tau|^{1-\alpha} \leq M_1 \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot \varepsilon^{-\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha}}. \qquad (18)$$

Подберем β – так, чтобы было $\varepsilon^{\beta/\alpha} = \left(ln(1/\varepsilon)\right)^{-1}$, тогда $\varepsilon^\delta = \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha}\left(ln(1/\varepsilon)\right)^{1-\alpha}$.

Пусть $|ln(1/\varepsilon)| \equiv N$ – при фиксированном малом ε и разобьём отрезок $[0, \tau_0]$ на *N* частей точками деления $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ и обозначим через $\mu = 1/N$.

Рассмотрим уравнение (17) на отрезке $[\tau_0 - \tau_{N-1}, \tau_0]$. Подберем ε так, чтобы $w_0 \geq 2w_1(\varepsilon)$

тогда из (18) имеем

$$|V(\tau)| \leq w_1(\varepsilon) + M_1 \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha}\left(ln(1/\varepsilon)\right)^{1-\alpha} \leq 2w_1(\varepsilon).$$

$$|T_1V_1 - T_1V_2| \leq \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \int_\tau^{\tau_0} |F(S, V_1(s), \varepsilon) - F(S, V_2(s), \varepsilon)| ds \leq \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \int_\tau^{\tau_0} \frac{|V_1 - V_2|}{S^\alpha} ds \leq \overline{\lambda_1}\, \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha} \|V_1 - V_2\| \left(ln(1/\varepsilon)\right)^{1-\alpha},$$

где $\overline{\lambda_1} = \lambda, (1-\alpha) = \frac{3M + 2(w_0 + 2w_1(\varepsilon))}{1-\alpha}$,

$$\|V_1 - V_2\| = \max_{\tau \in [\tau_0 - \tau_{N-1}, \tau_0]} |V_1 - V_2|$$

Если подберем ε так, чтобы

$$\bar{\lambda}_1 \varepsilon^{(1-\alpha)/\alpha}\left(ln(1/\varepsilon)\right)^{1-\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

то оператор T_1 является сжимающим и отображаем шар $C_{\omega_{1(\varepsilon)}}$ в себя.

Согласно, принципу сжимающих отображений уравнение (17) имеет единственное решение на отрезке $[\tau_0 - \tau_{N-1}, \tau_0]$ при малом ε, причем $|V(\tau)| \leq 2\omega_1(\varepsilon)$. Таким образом, мы достигаем точку $\tau_1^* = \tau_0 - \tau_{N-1} = \tau_0 - \mu$. Аналогичным образом, после *N* шагов мы достигаем точку $\tau = 0$.

Таким образом доказано следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в *теореме 1* дополнительно $w_0 > 0$. Тогда решение задачи (1) существует на отрезке [0, 1] и

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots, \varepsilon^{(1-\beta)/\alpha} \leq x \leq 1 \\ w_0 + V\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right), 0 \leq x \leq x^{(1-\beta)/\alpha}. \end{cases}$$

Случай б) $\delta = 1$ доказывается точно таким же способом, как и выше.

Литература:

1. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. - Бишкек: Илим, 1992. -138 стр.

2. Мишенко Е.Ф. Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релакционные колебания. – М. Наука. 1975. – 248 стр.

3. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М. Наука, 1980.

4. Comstok C. The Poincare – Lighthill Perturbation technique and its generalizations// SIAM Rev.- 1972. – V.14, №3. – P. 433-443 стр.

5. Притуло М.Ф. Об определении равномерных решений дифференциальных уравнений методом возмущения координат. // Прикл. математика и механика. – 1962. – Т.26, №1. – С. 444-448 стр.

6. Туркманов Ж.К. О задаче Лайтхилла со слабой особенностью. //*IV* Республ, научно-метод. конф. «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики». – Бишкек: КГПУ им.И.Арабаева, 1997. – *г*.2. – С. 3-6.