



Мотивации в изучении нелинейных отображений фрактальности и хаоса методом наглядного моделирования

Секованов Валерий Сергеевич, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, доктор педагогических наук, профессор;

Ивков Владимир Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики и информатики Костромской государственной университет им. Н.А. Некрасова

Смирнов Евгений Иванович, заведующий кафедрой математического анализа, доктор педагогических наук, профессор

Ярославский государственный университет им. К.Д. Ушинского

Идеи нелинейной динамики находят широкое применение в различных областях человеческих знаний. Исследование нелинейности показывает, что именно они отражают реальные проявления фрактальности и хаоса. В данной работе исследуются некоторые нелинейные отображения: фрактальная кривая Ван-дер-Вардена и построение множеств Жюлеа путем исследования графического представления аттракторов рационального отображения и разрабатываются алгоритмы выявления сингулярности Янга-Ли. Использование информационных технологий является необходимым инструментом визуализации аналитических вычислений. При этом наглядное моделирование сложных математических конструкций является весомым фактором повышения учебной мотивации.

Ключевые слова. Фрактальность и хаос, сингулярности Янга-Ли, наглядное моделирование, мотивации.

Введение

Идеи фрактальной геометрии находят широкое применение в различных областях человеческих знаний. Об интенсивности исследований в области фрактальной геометрии свидетельствуют многие современные исследования. Сложные нелинейные объекты и процессы изучаются в различных математических дисциплинах; например, в теории вероятностей (стохастические процессы, распределения случайных величин), в геометрии (инверсия, бирациональные отображения и преобразования), в математическом анализе (канторово множество, преобразование Фурье, вариации функционалов и т.п.). Фракталы с большой точностью описывают многие физические явления и образования реального мира: горы, облака, корни, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды, что далеко не соответствует простым геометрическим фигурам. Броуновское движение как случайное и хаотическое движение частичек пыли, взвешенных в воде, также является элементом фрактальной геометрии [3, с. 43]. След, оставляемый броуновской частицей, практически заполняет всю плоскость, т.е. во фрактальном смысле его размерность равна не 1, а 2. И это дает полное право броуновскому движению называться фракталом [5, с.28]. Фрактальные структуры проявляются и в некоторых агрегационных явлениях (осаждение, фильтрация, электролиз, и агрегация коллоидов, аэрозоли, пыли, сажи). Фрактальные кластеры (агрегаты) образуются в растворе при образовании геля, т.е. кластера, состоящего из соединенных частиц - зелей; при образовании подобных систем в дымах и туманах; при релаксации металлического пара; при образовании пленок на поверхности в процессе напыления их из струи, содержащей аэрозоли; при образовании кластеров из частиц, находящихся в суспензиях и коллоидных растворах [2, с. 56]. Появилась теория фрактальных трещин, модель трения для фрактальных поверхностей, фрактальная механика древесно-полимерных композитов и пр. Физическое определение фрактала следующее:

«Фракталы — это геометрические объекты (линии, поверхности, тела), имеющие сильно изрезанную структуру и обладающие свойством самоподобия в ограниченном масштабе» [9, с.402].

Методология и теоретическая часть

В работе [9, с.402] рассматривается применение фракталов в радиофизике и радиоэлектронике, в частности — фрактальная фильтрация малококонтрастных объектов. Показаны современные радиолокационные системы в совокупности с каналом распространения радиоволн и объектами зондирования с точки зрения теории сложных неравновесных систем, открытых для потоков энергии, энтропии и информации. В основе радиофизического применения теории фракталов лежат принципиально новые методы обработки полей и сигналов, которые используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных и эффекты самоподобия. Дробные фрактальные размерности характеризуют не только топологию исследуемых объектов, но и отражают процессы эволюции динамических систем и связаны с их свойствами. По своему содержанию контуры всех природных объектов суть динамические процессы, внезапно застывшие в физических формах и объединяющие в себе устойчивость и хаос. В современных условиях бурного развития математического моделирования, вычислительного эксперимента, компьютерной графики становится особо актуальным формирование нелинейного мышления на основе синтеза визуализации математических образов и формально-логических методов. Одним из эффективных методов развития нелинейного мышления студентов является лабораторное исследование сложных многоаспектных явлений и процессов фрактальности с использованием информационных технологий [1, с.4]. Обратимся к классическому примеру Ван дер Вардена непрерывной на отрезке и нигде не дифференцируемой функции [8, с. 218], график которой представлен на рис.1.

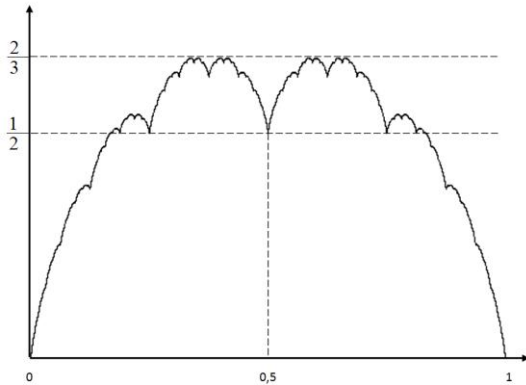


Рис. 1. Пример Ван дер Вардена всюду не дифференцируемой функции; ее графиком является аффинно самоподобная фрактальная кривая

Хорошо известно, что аттрактор системы итерированных сжимающих преобразований СИФ (СИФ — это система итерированных функций, так принято говорить в случае системы итерированных преобразований или отображений, так как они задаются с помощью уравнений, т.е. функций) является фрактальным множеством, как правило, дробной размерности Минковского. В нашем случае, опираясь на свойство функции Ван дер Вардена: для любого $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и

$$x = 2^{-n} \text{ справедливо } \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}$$

легко установить, что аффинные преобразования с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

или, проще,

$$A(x, y, z) = (x, x+y, 2z) \\ B(x, y, z) = (x+1, x+y+1, 2z)$$

отображают кривую на себя и составляют пару образующих группы автоморфизмов кривой. Кривая строится с помощью СИФ следующим образом.

Пусть K — единичный квадрат с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$. Преобразования A, B отображают K на красный и синий параллелограммы соответственно. Выполняя эти отображения бесконечно много раз, мы получим последовательность:

$$T_0 = K \\ T_1 = A T_0 \cup B T_0 \\ \dots \\ T_n = A T_{n-1} \cup B T_{n-1} \\ \dots$$

Фигура $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ получена после бесконечного числа итераций и имеет нулевую площадь. Действительно, площадь фигуры T_n равна $S_n = 2^{-n}$. Следовательно,

Определим характер найденных неподвижных точек:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1.1}{2x - 2.1} \right)^2 = \frac{4x(x^2 - 1.1)}{(2x - 2.1)^2} - \frac{4(x^2 - 1.1)^2}{(2x - 2.1)^3}$$

площадь фигуры T равна $S_n = 2^{-n}$.

Фигура T является одним периодом кривой и обладает свойством аффинного самоподобия (Бенуа Мандельброт аффинно-самоподобные множества называет самоаффинными [6, с. 309]. При этом кривая получена посредством системы итерированных аффинных преобразований A, B . Самоподобие в данном случае означает, что любой самый малый участок фрактальной кривой T можно с помощью аффинных преобразований A, B отобразить на исходную кривую T .

Деррида, Де Сезе и Ициксон впервые обнаружили тождественность нулей Янга-Ли в термодинамическом пределе с множеством Жюлиа преобразования перенормировки, то есть фазовая

$$R_q = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^q$$

граница Янга-Ли совпадает с фрактальным множеством Жюлиа преобразования R_q . В монографии [7, с.79] рассмотрены в смысле перенормировок фазовые границы Янга-Ли, продолженные в комплексную плоскость. Однако подробных пояснений для построения множеств Жюлиа рациональной функции нет, что вызывает многочисленные

$$R_q = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^q$$

вопросы у бакалавров, студентов, магистров и аспирантов, изучающих теорию фазовых переходов и множества Жюлиа.

Проведем исследование при $q = -0,1$. Имеем:

$$R_{-0.1} = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^{-0.1} = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^{0.1}$$

Неподвижные точки находятся из уравнения: $(R_q(x))^q = x$, $\left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^2 = x$. Произведя преобразование,

получим: $x^2 - 2x + 1 = x(2x - 2)^2$. Данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 2x + 1 = 4x(x - 1)^2$. Решая последнее уравнение с помощью среды MathCAD, получим:

$$\text{polyroots} \begin{pmatrix} 1.21 \\ -4.41 \\ 6.2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.975 + 0.449i \\ 0.975 - 0.449i \\ 1 \\ 1.049 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.975 + 0.449i$$

$$x_2 = 0.975 - 0.449i$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1.049$$

Заметим также, что неподвижной точкой отображения

$$R_q = \left(\frac{x^2 - 1}{2x - 2} \right)^q \text{ будет и точка } \infty.$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_1} \right| = \left| \frac{4 \cdot (0.975 + 0.449) \cdot [(0.975 + 0.449)^2 - 1.1]}{[2 \cdot (0.975 + 0.449) - 2.1]^2} - \frac{4 \cdot [(0.975 + 0.449)^2 - 1.1]^2}{[2 \cdot (0.975 + 0.449) - 2.1]^3} \right| = 1.049$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_2} \right| = \left| \frac{4 \cdot (0.975 - 0.449) \cdot [(0.975 - 0.449)^2 - 1.1]}{[2 \cdot (0.975 - 0.449) - 2.1]^2} - \frac{4 \cdot [(0.975 - 0.449)^2 - 1.1]^2}{[2 \cdot (0.975 - 0.449) - 2.1]^3} \right| = 1.049$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_3} \right| = \left| \frac{4 \cdot 1 \cdot (1^2 - 1.1)}{(2 \cdot 1 - 2.1)^2} - \frac{4 \cdot (1^2 - 1.1)^2}{(2 \cdot 1 - 2.1)^3} \right| = 0$$

$$\left| \frac{dR_q}{dx_4} \right| = \left| \frac{4 \cdot 1.049 \cdot (1.049^2 - 1.1)}{(2 \cdot 1.049 - 2.1)^2} - \frac{4 \cdot (1.049^2 - 1.1)^2}{(2 \cdot 1.049 - 2.1)^3} \right| = 501.049$$

Точка $x_3=1$ – притягивающая неподвижная точка.

Точки $x_1=0.975+0.449i$, $x_2=0.975-0.449i$, $x_4=1.049$ – отталкивающие неподвижные точки, поскольку

$$|(R_q(x_1))'| > 1, |(R_q(x_2))'| > 1, |(R_q(x_4))'| > 1, |(R_q(x_3))'| < 1$$

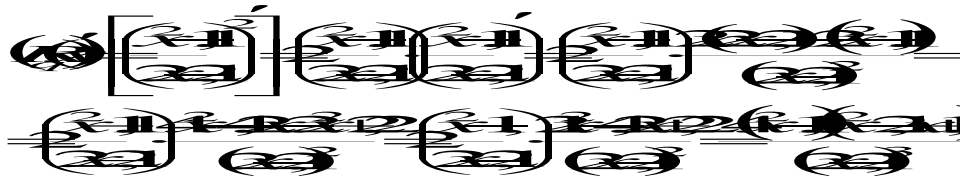
Полученные вычисления показывают, что из четырех точек x_1, x_2, x_3, x_4 притягивающей неподвижной точкой будет

только точка $x_3 = 1$.

Согласно теореме Б.2.4. (Кронвер Р.М., 2000) каждый притягивающий цикл A притягивает критическую точку C .

Поэтому для нас важны критические точки отображения $R_q(x)$, которые мы

сейчас найдем, не используя информационно-коммуникационные технологии. Имеем:



Критическими точками отображения $R_q(x)$ являются :

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{21}{2} = 10.5; \quad x_3 = \sqrt{11} \approx 3.3166; \quad x_4 = \sqrt{11} \approx 3.3166; \quad x_5 = 1.1; \quad x_6 = \infty.$$

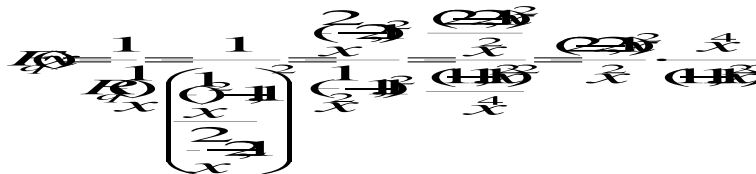
Замечаем, что $x_1=1$ является притягивающей неподвижной точкой. Точка $x_6 = \infty$ также является неподвижной притягивающей точкой для функции $R_{-0.1}(x)$. Следуя [4, с.331] поясним сказанное.

Поведение функции $R_q(x)$ в окрестности V бесконечно удаленной точки эквивалентно поведению функции

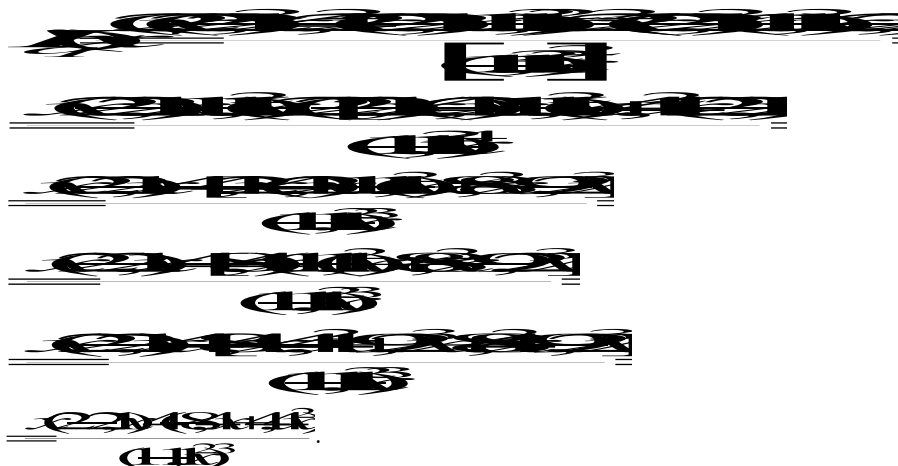
$$F_q(x) = \frac{1}{R_q\left(\frac{1}{x}\right)}$$

в окрестности точки 0. Более точно: точку будем считать неподвижной притягивающей точкой функции R_q если 0 – неподвижная притягивающая точка функции F_q

В нашем случае имеем: $R_q\left(\frac{x^2-11}{2x-21}\right)$.



Следовательно, $R_q\left(\frac{x^2-11}{2x-21}\right)$.



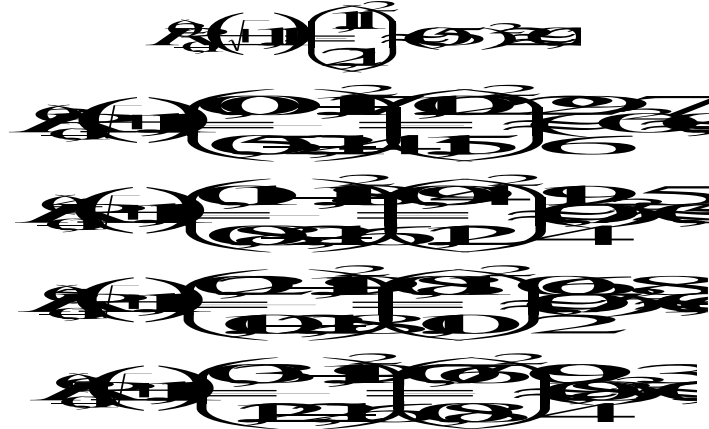
Таким образом, $F_q'(x) = 0$ при $x=0$. Следовательно, бесконечно удаленная точка является сверхпритягивающей неподвижной точкой для функции

$$R_q(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 2}$$

Точка $x_2 = \frac{21}{2} = 10.5$ отображается на ∞

$$\left(R_q(10.5) = \frac{10.5^2 - 1}{2 \cdot 10.5 - 2} \right) \rightarrow \infty \quad \text{после первого}$$

$$R_q(\pm\sqrt{1}) = 0$$



Поскольку $R_q(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 2}$, то при $x \in (0; 1)$ $(R_q(x))' > 0$ и $R_q(1) = 1$, замечаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_q^n(\pm\sqrt{1}) = 1$.

Согласно [7, с.124] в данном случае не может быть дополнительных аттракторов, то есть аттракторами являются только точки 1 и ∞ . Отметим, что для графического представления аттракторов нами были разработаны алгоритмы выявления сингулярности Янга-Ли – множество Жюлиа преобразования перенормировки

отображений $R_q(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 2}$ для $q = -0.1$ с

помощью языка программирования Pascal. При этом существенно повышению таких видов учебной мотивации как мотивации достижения, самореализации и интеллектуального напряжения [10, с. 267].

Заключение

Таким образом, спектр применения фрактальной теории в естествознании достаточно широк и разнообразен. И действительно, ведь мы живем «с фрактальными артериями неподалеку от фрактальных речных систем,

шага и остается там: $R_{q1}^2(10.5) = \infty \dots R_{q1}^n(10.5) = \infty$.

Так как $R_{q1}^2(\pm\sqrt{1}) = 0$, то остается исследовать только траектории точек 1, 1 и 0. Согласно [7, с.124] траектории этих точек взаимодополняющие, и достаточно исследовать траектории точек $\pm\sqrt{1}$, что равносильно исследованию траектории точки 0 ибо $R_{q1}^2(\pm\sqrt{1}) = 0$. Итак, мы имеем:

собирающих влагу со склонов фрактальных гор под фрактальными облаками и катящих свои воды к фрактальным берегам морей и океанов» [4, с.18]. При этом характерно, что небольшой горизонт прогнозирования — характерное свойство динамических нелинейных систем. Тем не менее, глобальное поведение орбиты вполне понятно: орбита бесконечно близко притягивается к аттрактору и можно считать, что она после достаточно большого числа итераций практически движется по аттрактору, являющемуся, как правило, мультифракталом дробной размерности. Еще одно характерное свойство нелинейных процессов (и мышления) — это возвращаемость. Это означает, что при движении точки по аттрактору она через достаточно большое число итераций попадает в любую бесконечно малую окрестность любой наперед заданной точки. Так и в поиске решения исследовательских задач нам приходится возвращаться к одному и тому же месту в наших рассуждениях, но всякий раз с новым осмыслением пока нерешенной микропроблемы. Таким образом, знание законов и динамики разворачивания нелинейных процессов реально приводит к формированию основ творческого мышления и повышению учебной мотивации.

Литература:

1. Афанасьев В.В., Смирнов Е.И. Экспериментальное исследование творческой активности студентов в процессе обучения математике // Ярославский педагогический вестник / В.В.Афанасьев, Е.И.Смирнов [Текст] / -Т.6, №3, 1996.- С.110-115.
2. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
3. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. – ДАН СССР 30(4), 1941. [Электронный ресурс] <http://catalog.enu.kz:55555/guid/192A9F87-39BD-4B5E-A29E-85901681B081.pdf>



4. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер; пер. с англ. под ред. Т. Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 656 с.
6. Мандельброт Б., Хадсон Р. Л. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах [Текст]; пер.с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 400 с.
7. Пайтген Х.О, Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993, – 176 с.
8. Подготовка учителя математики: инновационные подходы: Учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова.— М.: Гардарики, 2002.— 383 с.
9. Потапов А. А. Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах // В кн. Р. Кроновер Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. – 488 с. [С.374-479].
10. Смирнов Е.И., Осташков В.Н., Богун В.В. Наглядное моделирование в обучении математике: Теория и практика. Учебное пособие. - Ярославль: Канцлер, 2010.- 498 с.