www. esa-conference.ru

Рекуррентная формула алгоритма решета Эратосфена. «Точное» значение». Гипотеза Лежандра. Гипотеза Гольдбаха. Доказательство гипотезы о бесконечности простых чисел, близнецов

Ситников Сергей Васильевич

The recurrent formula algorithm sieve of Eratosthenes
Рекуррентная формула алгоритма решета Эратосфена

1. Вывод формулы алгоритма

Если принять общее количество чисел за еденицу (1) и вычесть все числа делящиеся на два, получим числовой ряд состоящий только из нечётных чисел. Далее вычитаем из общего количества, числа делящиеся на три и прибавляем числа делящиеся на шесть, что бы избежать повторов при вычитании. И так далее, пока не останутся одни простые числа (p).

$$1-\frac{1}{2}.....$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.....$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{30}.....$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right).....$$

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right).....$$

$$\left[\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\left(1-\frac{1}{5}\right).....$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right).....$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right).....\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right).....\frac{p_i-1}{p_i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i} \qquad (1)$$

Рекуррентная формула алгоритма решета Эратосфена

Формула для вычисления количество простых чисел на интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$

$$\left(p_{n+1}^2-p_n^2\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

«Точное» значение»

2. Погрешность вычисления количества простых чисел на интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$

$$p_n^2 \pm a$$

$$a<1$$

На интервалах

$$\left(\left(p_n^2-a\right), p_n^2\right)$$

$$\left(p_n^2, \left(p_n^2+a\right)\right)$$

нет простых чисел, так как интервалы меньше еденицы. Воспользуемся формулами

$$\left(p_n^2-a\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$\left(p_n^2+a\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

при помощи которых вычисляем количество простых чисел на интервалах $\left(\left(p_n^2-a\right),p_n^2\right)$ $\left(p_n^2,\left(p_n^2+a\right)\right)$

разница

$$\left(p_n^2+a\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left(p_n^2-a\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

должна быть равна нулю. Так как, на интервалах

$$\left(\left(p_n^2-a\right),p_n^2\right)$$

$$\left(p_n^2,\left(p_n^2+a\right)\right)$$

нет простых чисел. Значит разница

$$\left(p_n^2+a\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left(p_n^2-a\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i},$$

есть ничто иное, как погрешность вычисления.

$$\left(p_n^2+a\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left(p_n^2-a\right)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}=p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}+a\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}+a\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}+a\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}+a\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

Величинами

$$+a\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}+a\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

можно пренебречь из-за малости этих величин.

Значит величина разницы

$$p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

есть не что иное, как погрешность вычисления при $a<1$.

$$p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i} \tag{3}$$

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i} \tag{4}$$

Вычитаем из формулы (3) формулу (4) получим формулу (5)

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-\left(p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right)-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i} \tag{5}$$

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}-\left(p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right) \tag{6}$$

Получили вычитание количества простых чисел на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ двумя способами.

Вывод: Если в формулах (5) в двух способах, равное количество простых чисел.

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

Тогда для формулы первого способа

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

величина погрешности вычисляется по формуле (3)
Для второго способа по формуле (4)

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\text{ -}$$

Количество простых чисел на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ Вычисление с погрешностью

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

3.«Точное» значение

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left[p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right]$$

Например: Простые числа 751, 757 573049-564001=9048
762,6242862648891 – 63,804883366791 = 698,8194028980978

Точное значение 695. Разница получается из неучтённых нюансов. Пренебрежение малыми величинами. Нужно шлифовать результат.

The Hypothesis Of Legendre
Гипотеза Лежандра

1. Пробел между соседними простыми числами
Введём два новых определения: Базисное число. Базис от базисного числа.
Базисное число – простое число p_n , (n) номер простого числа.
Базис – составные числа кратные базисному числу. Базисное число входит в свой базис.
Доказать:

На любом отрезке длиной $\left[0,p_{n+1}\right]$ на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ всегда есть простое число.

Доказательство:

Каждый базис имеет свою оригинальную формулу алгоритма. Например: $\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$ формула алгоритма базиса от базисного числа p_n. Каждый базис имеет своё, оригинальное расположение чисел базиса, выраженное формулой алгоритма, которое не повторяется ни в каком другом базисе. Каждый базис имеет своё размер. То есть имеет начало и конец.

На числовой оси в точке ноль имеют начало все базисы, общая для всех базисов формула алгоритма $\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$.

Первый отрезок на числовой оси, с началом в точке 0, длиной $\left[0,p_{n+1}\right]$ имеет простое число p_{n+1}. На любом отрезке $\left[0,p_{n+1}\right]$ с началом в произвольной точке, на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ есть простое число. Так как, даже при самом компактном распределении базисов, на начальном отрезке $\left[0,p_{n+1}\right]$, есть простое число p_{n+1}. А на отрезке $\left[0,p_{n+1}\right]$ с началом в произвольной точке, при оригинальном расположение базисов, просто меняется местоположение простого числа. Более того, бывает, все базисы не помещаются в отрезок, и на отрезке может быть несколько простых чисел.

Вывод: На любом отрезке длиной $\left[0,p_{n+1}\right]$ на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ всегда есть простое число.

2. Гипотеза Лежандра, доказательство с помощью постулата Бертрана.

На интервале $\left(n^2,(n+1)^2\right)$ всегда есть простое число. На любом отрезке длиной $\left[0,p_{n+1}\right]$ на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ всегда есть простое число.

На интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$ самая маленькая разница, между квадратами двух соседних чисел равна $\left(p_n+1\right)^2-p_n^2$.

Доказать, что эта наименьшая разница, при любом p_n, больше p_{n+1}.

Этим доказательством, докажем и гипотезу Лежандра.

На любом интервале $\left(n^2,(n+1)^2\right)$ есть простое число.

Доказать:

При любом p_n

$$\left[\left(p_n+1\right)^2-p_n^2\right]>p_{n+1}$$

$$p_n^2+2p_n+1-p_n^2>p_{n+1}$$

$$2p_n+1>p_{n+1}$$

Постулат Бертрана, доказанный Чебышевым. Первый из результатов, содержащихся в мемуаре «О простых числах» - доказательство постулата высказанного Ж. Бертраном в 1845 году. Существует всегда простое число, большее чем (а) и меньшее (2а-2).

У нас возникла необходимость доказать, $2p_n+1>p_{n+1}$, существует всегда простое число p_{n+1}, большее, чем p_n и меньшее $2p_n+1$.

И мы можем сказать, при любом p_n

$$\left[\left(p_n+1\right)^2-p_n^2\right]>p_{n+1}$$

Неравенство верно. И гипотеза Лежандра доказана.

Goldbach's Conjecture.
Гипотеза Гольдбаха.

$$2t=p_n+p_m \quad (1)$$

$$2t'=p_{n''}-p_n \quad (2)$$

Формула (1) гипотеза Гольдбаха. Формула (2) отрезки между простыми числами, $2t'$ - все чётные числа.

Почему доказательство гипотезы Гольдбаха, на разности простых чисел, а не на сумме? Потому что доказательство на разнице, это доказательство существование отрезка между двумя границам. Тогда как доказательство по сумме, это доказательство существования отрезка с ограничением только по одной стороне. Это чистая неопределённость.

Доказать, что при любом, p_n, $2t'=2t$

$$2t'=2t$$

$$p_n+p_m=p_{n''}-p_n$$

$$\left(2p_n=p_{n''}-p_m\right)(3)$$

Равенство (3) выполняется при любом простом числе, p_n. Потому что правая часть равенства, $p_{n''}-p_m$, все чётные числа $2t'$. Значит, при любом чётном числе, $2p_n$. Можно подобрать, равное ему, чётное число $p_{n''}-p_m$

Отсюда вывод, равенство

$$p_n+p_m=p_{n''}-p_n$$

Верное равенство. А так как правая часть этого равенства даёт все чётные числа, значит и левая часть даёт все чётные числа. Что и требовалось доказать, $2t$ - все чётные числа.

Доказать: $2t'$ - Все чётные числа.

Доказать: Размер отрезков, все чётные числа.

Обратимся к выводу рекуррентной формулы алгоритма решета Эратосфена

$$1-\frac{1}{2}\ldots$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ldots$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{30}\ldots$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\ldots$$

$$\left[\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\dots\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\dots\frac{p_i-1}{p_i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$$

Алгоритм решета Эратосфена делит составные числа на группы. Первая группа составных чисел имеет вид, $1-\prod_{i=1}^{1}\frac{p_i-1}{p_i}$ при (n-1), $p_1=2$. Все составные числа из этой группы делятся на два. Вторая группа составных чисел имеет вид $\left(1-\prod_{i=1}^{2}\frac{p_i-1}{p_i}\right)-\left(1-\prod_{i=1}^{1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$ эти составные числа, делятся на три и не делятся на два. И так далее.

$\left(1-\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right)-\left(1-\prod_{i=1}^{n-1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$ Вид произвольной группы. Обозначим каждую группу буквой G, с индексом, обозначающим номер группы. G_1 - первая группа

Из первой группы формируются отрезки, состоящие из одного составного числа. На всей числовой оси. Из второй группы, добавляются к некоторым составным числам из первой группы, по одному числу и формируются отрезки, состоящие из двух последовательных составных чисел.

Добавляются, составные числа к отрезкам, по всей числовой оси, начиная с простого числа группы и до бесконечности.

Вопрос, всегда ли добавляются составные числа из групп, к самым большим предыдущим отрезкам.

Ответ, да добавляются.

Почему?

Основные свойства групп. Все составные числа в одной группе кратные одному простому числу. В группах нет одинаковых составных чисел. У каждой группы, свой алгоритм распределения чисел на числовой оси. У каждого алгоритма свой цикл, у каждого цикла свой размер, и свой порядок размещения составных чисел для одного цикла. Значит, на числовой оси, не возможен в бесконечности, никакой цикл, никакой алгоритм распределения простых чисел и распределения одинаковых отрезков в каком бы то ни было алгоритме циклов.

Из этого следует, невозможность отсутствия, какого либо размера отрезка из последовательных составных чисел. Значит.

Отрезки между простыми числами все чётные числа.

И суммирование по простым числам, то же даёт все чётные числа.

The proof of the hypothesis of the infinity of primes, twins.

Доказательство гипотезы о бесконечности простых чисел, близнецов.

ЧИСЛА ПРИМЕСИ

Числа примеси — это составные числа, которые неполная формула алгоритма, принимает и учитывает в расчётах как простые числа.

$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left[p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right]$ - (1) Формула точного зачения количества простых чисел на интервале $\left(p_n^2,p_{n+1}^2\right)$

Неполная формула, это формула (1) при значении (n-t). (n) — номер простого числа.

Основное свойство чисел примеси. Они никогда не повторяются при изменении числа (t).

Доказательство основного свойства чисел примеси.

Основное свойство чисел примеси, получается из вывода формулы алгоритма решета Эратосфена. В выводе, с каждым шагом, сначала вычитаются все числа, делящиеся на два, потом на три с удалением повторов. То есть при втором шаге вывода формулы аогоритма, вычитаются только делящиеся на три, но не на два и три. Из этого следует, при каждом последующем шаге вывода формулы алгоритма, вычитаются составные числа ранее не встречающиеся. Вот поэтому числа примеси, **никогда не повторяются при изменении (t).**

$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}$ - (2) Формула алгоритма рещета Эратосфена.

Если в формуле (2) убрать первый множитель получим $\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www. esa-conference.ru

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\left[p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}\right]$$ - (3) Формула количества чисел близнецов и плюс простые числа на интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\left[p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}\right]-$$
$$-\left\{p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\left[p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}-p_n^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}\right]\right\}$$ - (4) Формула количества простых чисел близнецов на интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$

Упростим выражение формулы (4)

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\left(p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$$

$$p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}+p_{n+1}^2\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}$$

$$p_{n+1}^2\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}+\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$$

$$p_{n+1}^2\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{2(p_i-1)}{p_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2(p_i-1)}{p_i}+\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}\right)$$

$$p_{n+1}^2\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i-1}{p_i}-\prod_{i=1}^{n+1}\frac{p_i-1}{p_i}\right) \quad (4)$$

Формула (1) не даёт абсолютно точного результата. Небольшая разница получается из неучтённых нюансов. Пренебрежение малыми величинами. Так как результат не отшлифован, утверждать, что на каждом интервале $\left(p_n^2, p_{n+1}^2\right)$ Будет расти количество простых чисел близнецов, я не могу. Зато можно утверждать, исходя из формулы (4), что количество простых чисел близнецов будет расти бесконечно.

Гипотеза о бесконечности простых чисел, близнецов – доказана.

Литература:

1. Под редакцией Юшкевича. Хрестоматия по истории математики. Москва «Просвещение» 1976. – 317 с.
2. Бородин А И. Теория чисел. Киев «Высшая школа» 1992. – 284 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Издательство «Наука» Москва 1976. – 870 с.