ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Проблема Фробениуса для четырех натуральных чисел, три из которых соседние

Савельев Владимир Петрович, кандидат физико – математических наук, доцент
ORCID 0000–0002–1825–0023
Нижегородский инженерно – экономический университет (г. Княгинино)

Аннотация. *Проблеме нахождения числа Фробениуса для конечного множества натуральных чисел* $a_i \in N, i = \overrightarrow{1,n}$, *посвящено много работ, довольно полный обзор которых имеется в* [1]. *В общем случае, формулы числа Фробениуса нет даже для трех натуральных чисел. При выполнении некоторых условий имеются алгоритмы и формулы вычисления числа Фробениуса для трех натуральных чисел, например, алгоритм Шевченко* [2], *алгоритм Гринберга* [3], *формула Джонсона* [4]. *В работе* [5, *стр.* 88 – 103] *получены формулы в случае четырех натуральных чисел вида* $\{a, a+1, a+3, a+m\}$, *когда* $m = 4,5,6,7$. *В настоящей работе получена формула числа Фробениуса для этих четырех чисел, при условии, что* $a = km, k \in N$.

Ключевые слова: *аддитивная полугруппа чисел, множество Фробениуса, число Фробениуса*

Для исходного множества натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ определим аддитивную полугруппу $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$, порожденную этими числами. Отметим, что каждый элемент $g \in G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно представить в виде линейной целочисленной неотрицательной комбинации

$g = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ma_n, x_i \in Z_+, i = \overrightarrow{1,n}.$

Множество $N \backslash G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \overline{G(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ называется множеством Фробениуса. Числом Фробениуса $frob(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется наибольшее натуральное число, принадлежащее множеству Фробениуса $\overline{G(a_1, a_2, \dots, a_n)}$.

Для доказательства, что некоторое число является числом Фробениуса, весьма полезным является следующее утверждение [5,стр 61}.

Утверждение 1. Пусть $a_i \in N, i = \overrightarrow{1,n}$, и $a = min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если каждое из a последовательных натуральных чисел, начиная с некоторого числа b, принадлежит аддитивной полугруппе $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то ей принадлежат все натуральные числа, начиная с числа b.

Утверждение 2. Пусть $m = \overrightarrow{2+2\imath, 3+2i}, i \in Z_+, a = km, k \in N$, тогда число Фробениуса для чисел $a, a+1, a+2, a+m$ определяется по формуле

$$frob(a, a+1, a+2, a+m) = (k+i)a - 1. \ (1)$$

Во-первых, покажем, что линейная комбинация

$$L = x_0a + x_1(a+1) + x_2(a+2) + x_3(x+m), \ (2)$$

не может принимать значения $(k+i)a - 1$ ни при каких $x_i \in Z_+, i = \overrightarrow{0,3}$.

Действительно, если предположить, что $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \geq k + i$, то значение линейной комбинации (2) будет строго больше, чем $(k+i)a - 1$:

$L \geq (k+i)a + x_1 + 2x_2 + mx_3 > (k+i)a - 1.$

Если предположить, что $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = k + i - l, l \geq 1$, то значение линейной комбинации (2) не может равняться значению $(k+i)a - 1$:

$L = (k+i-l)a + x_1 + 2x_2 + mx_3 = (k+i-l)a + x_1 + 2x_2 + m(k+i-l-x_0-x_1-x_2) = (k+i-l)a + mk + mi - lm - mx_0 - (m-1)x_1 - (m-2)x_2 = (k+i)a + m(k+i) - l(m+a) - mx_0 - (m-1)x_1 - (m-2)x_2 \neq (k+i)a - 1,$

так как имеет место неравенство

$$mx_0 + (m-1)x_1 + (m-2)x_2 \neq m\big(k+i-l(1+k)\big) + 1. \ (3)$$

Действительно, если $i < l(1+k) - k = (l-1)(k+1) + 1$, то правая часть неравенства (3) будет отрицательной.

Далее будем считать, что $i \geq (k+1)(l-1) + 1 \geq 1$.

Если $m = 2 + 2i$ и $x_0 + x_1 + x_2 \geq k + i - l(1+k) + 1$, то левая часть неравенства (3) будет строго больше правой части:

$mx_0 + (m-1)x_1 + (m-2)x_2 = (m-2)(x_0 + x_1 + x_2) + x_1 + 2x_0 \geq 2i^2 - 2i(l-1)(k+1) + x_1 + 2x_0 > m\big(k+i-l(1+k)\big) + 1 = 2i^2 - 2i(l-1)(k+1) - 2(l-1)(k+1) - 1.$

Если $x_0 + x_1 + x_2 \leq k + i - l(1+k)$, то левая часть неравенства (3) будет строго меньше правой части: $mx_0 + (m-1)x_1 + (m-2)x_2 \leq m(k+i-l(1+k)) - x_1 - 2x_2 < m(k+i-l(1+k)) + 1.$

Аналогичным образом и для $m = 3 + 2i$ показывается, что

$mx_0 + (m-1)x_1 + (m-2)x_2 \neq m\big(k+i-l(1+k)\big) + 1.$

Во-вторых, покажем, что линейная комбинация (2) может принимать все натуральные значения от числа $(k+i)a$ до числа $(k+i)a + km - 1$ включительно. Действительно, если $m = 2 + 2i$ и

$x_0 = k + i - l - p - q, x_1 = l, x_2 = p, x_3 = q,$

то линейная комбинация (2) примет вид

$$L = (k+i)a + mq + 2p + l = (k+i)a + 2(i+1)q + 2p + l. \ (4)$$

При задании $l = 0, p = \overrightarrow{0, \imath + 1}, q = \overrightarrow{0, k-1}$, линейная комбинация (4) примет последовательно с шагом 2 все натуральные значения от числа $(k+i)a$ до числа $(k+i)a + 2(i+1)(k-1) + 2(i+1) = (k+i)a + 2k(i+1) = (k+i)a + km$ включительно.

При задании $l = 1, p = \overrightarrow{0, \imath}, q = \overrightarrow{0, k-1}$, линейная комбинация (4) примет последовательно с шагом 2 все натуральные значения от числа $(k+i)a + 1$ до числа $(k+i)a + 2(i+1)(k-1) + 2i + 1 = (k+i)a + 2k(i+1) - 1 = (k+i)a + km - 1$ включительно.

Аналогично, пусть $m = 3 + 2i$ и

$x_0 = k + i - l - p - q \geq 0, x_1 = l \geq 0, x_2 = p \geq 0, x_3 = q \geq 0,$

тогда линейная комбинация (2) примет вид

$$L = (k+i)a + mq + 2p + l = (k+i)a + (2i+3)q + 2p + l. \quad (5)$$

При задании $l = 0, p = \overrightarrow{0, \imath + 1}, q = \overrightarrow{0, k-1}$, линейная комбинация (5) примет последовательно с шагом 2 все натуральные значения от числа $(k+i)a$ до числа $(k+i)a + (2i+3)(k-1) + 2(i+1) = (k+i)a + k(2i+3) - 1$ включительно.

При задании $l = 1, p = \overrightarrow{0, \imath}, q = \overrightarrow{0, k-1}$, линейная комбинация (5) примет последовательно с шагом 2 все натуральные значения от числа $(k+i)a + 1$ до числа $(k+i)a + (2i+3)(k-1) + 2i + 1 = (k+i)a + k(2i+3) - 2$ включительно.

Примеры.

1) $m = 4, i = 1, a = 8, k = 2: frob(8,9,10,12) = (2+1)8 - 1 = 23.$
2) $m = 5, i = 1, a = 10, k = 2: frob(10,11,12,15) = (2+1)10 - 1 = 29.$

Литература:

1. Alfonsin J. R. The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005. 243 P.
2. Шевченко В.Н. Задача о размене, задача Фробениуса и задача групповой минимизации // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. – Горький: Издательство Горьковского университета, 1982. – С 166 - 179.
3. Greenberg H., Solution to a Diophantine Equation for nonnegative integers, J. Algorithm., 9(3),1988, pp.343–353.
4. S. M. Johnson, A linear Diophantine problem, Can. J. Math. 12 (1960), pp. 390–398.
5. Савельев В. П. Задачи дискретной и непрерывной оптимизации. Изд –во LAP LAMBERT Academic Publishing, 2020. - 134 с.