ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Задача о рюкзаке, условия оптимальности

Савельев Владимир Петрович, кандидат физико – математических наук, доцент
Нижегородский инженерно – экономический университет (г. Княгинино)

Аннотация. *Известно, что в задачах на экстремум большую роль играют необходимые и (или) достаточные условия оптимальности. Это справедливо как в отношении конечномерной оптимизации (теорема Куна-Таккера [1]), так и в отношении оптимизации функционалов (уравнение Эйлера в вариационном исчислении [2], принцип максимума Л.С.Понтрягина [3] в оптимальном управлении). Во-первых, в ряде случаев при решении экстремальных задач условия оптимальности можно эффективно использовать непосредственно для нахождения экстремального элемента, например, в конечномерной оптимизации с небольшим числом переменных и ограничений на них. Во-вторых, на основе условий оптимальности путем устранения невязок можно построить процедуру последовательного улучшения исходного элемента, пока не получится оптимальный элемент [4-6]. В данной работе предпринята попытка применить этот подход для задачи целочисленного программирования, а именно к одному из вариантов задачи о рюкзаке. Получены достаточно простые необходимые и достаточные условия оптимальности. Проверка этих условий оптимальности на исходном допустимом векторе приводит к одному из двух результатов: либо вектор удовлетворяет условиям оптимальности, либо указывается вектор, доставляющий целевой функции большее значение, чем исходный.*

Ключевые слова: *вариация, условия оптимальности, целевая функция.*

Постановка задачи

Пусть заданы числа $a_i \in N, c_i \in N, i = \overrightarrow{1,n}, b \in N$, и непустое множество

$D = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z_+^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\}$. (1)

Требуется определить вектор $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$, доставляющий максимальное значение линейной функции

$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (2)

Определение. Целочисленный вектор $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ будем называть допустимой вариацией для вектора $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$, если выполняются условия

$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0,\ x_i^0 + k_i \in \left[0, \left\lfloor \frac{b}{a_i} \right\rfloor\right], i = \overrightarrow{1,n}$, (3)

где $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$ означает наибольшее целое число, не превосходящее число x.

Условия оптимальности

Для того, чтобы вектор $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ был оптимален, необходимо и достаточно, чтобы для любой допустимой вариации имело место неравенство

$k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n \le 0$ (4)

Необходимость. Действительно, если найдется хотя бы одна допустимая вариация, такая что выполняется противоположное неравенство

$k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n > 0$, (5)

то вектор $X^1 = (x_1^0 + k_1, x_2^0 + k_2, \dots, x_n^0 + k_n) \in D$ будет доставлять целевой функции большее значение, чем вектор X^0:

$F(X^1) - F(X^0) = k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n > 0.$

Достаточность. Пусть задан вектор $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$, для которого любая допустимая вариация $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ удовлетворяет неравенству (4). Возьмем произвольный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ и подсчитаем разность:

$F(X) - F(X^0) = c_1 \cdot (x_1 - x_1^0) + c_2(x_2 - x_2^0) + \cdots + c_n(x_n - x_n^0).$

Обозначив $k_i = (x_i - x_i^0), i = \overrightarrow{1,n}$, мы получим вариацию $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ для вектора X^0. Эта вариация – допустимая, поскольку выполняются условия (3). Кроме этого, по предположению, она удовлетворяет неравенству (4), то есть

$k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n = F(X) - F(X^0) \le 0.$

Отметим, что полученные необходимые и достаточные условия оптимальности позволяют построить процедуру последовательного улучшения исходного вектора, пока не получится вектор, удовлетворяющий необходимым и достаточным условиям оптимальности. Эта процедура основана на использовании неравенства (5).

Пример 1. Требуется найти максимальное значение функции

$F(X) = (2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4)$

в множестве

$D = \{X \in Z_+^n | \ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 30\}.$

Возьмем исходный вектор $X^0 = (3,2,4,1)$, для которого значение целевой функции $F(X^0) = 47$. Для допустимой вариации $K^1 = (0, -2, 5, -1)$ типа (3) получаем неравенство типа (5): $0 \times 2 + (-2) \times 5 + 5 \times 7 - 1 \times 3 = 22 > 0$.

В результате этой вариации получается допустимый вектор $X^1 = (3,0,9,0)$, для которого значение целевой функции $F^1 = 69$.

Для допустимой вариации $K^2 = (-3,0,1,0)$ типа (3) получаем неравенство типа (5): $-3 \times 2 + 0 \times 5 + 1 \times 7 + 0 \times 3 = 1 > 0$.

В результате этой вариации получается допустимый вектор $X^2 = (0,0,10,0)$, для которого значение целевой функции $F^2 = 70$.

Покажем, что вектор $X^2 = (0,0,10,0)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности. Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^2 = (0,0,10,0)$ имеют вид:

$k_1 + 4k_2 + 3k_3 + 7k_4 = 0,$
$0 \le k_1 \le 30, 0 \le k_2 \le 7, -10 \le k_3 \le 0, 0 \le k_4 \le 4.$

Подсчитав приращение целевой функции для любой допустимой вариации вектора X^2, убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = 2k_1 + 5k_2 + 7\left(-\frac{1}{3}k_1 - \frac{4}{3}k_2 - \frac{7}{3}k_4\right) + 3k_4 = -\frac{1}{3}k_1 - \frac{13}{3}k_2 - \frac{40}{3}k_4 \le 0.$

Пример 2. Требуется найти максимальное значение функции

$F(X) = (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4)$ (6)

в множестве

$D = \{X \in Z_+^n | \; x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 15\}.$ (7)

Отметим, что структура множества целочисленных решений более общего уравнения

$x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 2^n - 1$ (8)

изучена в [7] , где указано, что число крайних точек выпуклой комбинации этого множества равно 2^{n-1}. Указан также метод нахождения всех крайних точек этого множества и доказано, что для того, чтобы точка была крайней, необходимо и достаточно, чтобы эта точка максимизировала некоторый линейный функционал. В нашем примере $n = 4$, поэтому число крайних точек равно восьми: $X^1 = (15{,}0{,}0{,}0)$, $X^2 = (1{,}7{,}0{,}0)$, $X^3 = (1{,}1{,}3{,}0)$, $X^4 = (3{,}0{,}3{,}0)$, $X^5 = (7{,}0{,}0{,}1)$, $X^6 = (1{,}3{,}0{,}1)$, $X^7 = (1{,}1{,}1{,}1)$, $X^8 = (3{,}0{,}1{,}1)$. Как мы увидим, каждая из них доставляет минимум целевой функции (8) при определенном соотношении коэффициентов $8c_1, 4c_2, 2c_3, c_4$.

1) Пусть $8c_1 \ge \max\{4c_2, 2c_3, c_4\}$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^1 = (15{,}0{,}0{,}0)$

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^1 = (15{,}0{,}0{,}0)$ имеют вид:

$k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 8k_4 = 0$ (9)

$-15 \le k_1 \le 0, 0 \le k_2 \le 7, 0 \le k_3 \le 3, 0 \le k_4 \le 1.$ (10)

Выразив из (9) $k_1 = -2k_2 - 4k_3 - 8k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^1и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = (-2k_2 - 4k_3 - 8k_4)c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_2(c_2 - 2c_1) + k_3(c_3 - 4c_1) + k_4(c_4 - 8c_1) \le 0.$

2) Пусть $4c_2 \ge \max\{8c_1, 2c_3, c_4\}$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^2 = (1{,}7{,}0{,}0)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^2 = (1{,}7{,}0{,}0)$ имеют вид (9) и

$-1 \le k_1 \le 14, -7 \le k_2 \le 0, 0 \le k_3 \le 3, 0 \le k_4 \le 1.$ (11)

Заметим, что из условия (9) следует, что k_1 не может быть нечетным числом, в частности, не может равняться -1.

Выразив из (9) $k_2 = -\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^1 и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = k_1c_1 + \left(-\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4\right)c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \frac{1}{2}c_2\right) + k_3(c_3 - 2c_2) + k_4(c_4 - 4c_2) \le 0.$

3) Пусть $2c_3 \ge \max\{8c_1, 4c_2, c_4\}, 4c_2 \ge \max\{8c_1, c_4\}$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^3 = (1{,}1{,}3{,}0)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^3 = (1{,}1{,}3{,}0)$ имеют вид (9) и

$-1 \le k_1 \le 14, -1 \le k_2 \le 6, -3 \le k_3 \le 0, 0 \le k_4 \le 1.$ (12)

Заметим, что из условия (9) следует, что k_1 не может быть нечетным числом, в частности, не может равняться -1.

Выразив из (9) $k_2 = -\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^3 и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = k_1c_1 + \left(-\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4\right)c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \frac{1}{2}c_2\right) + k_3(c_3 - 2c_2) + k_4(c_4 - 4c_2) \le 0.$

4) Пусть $2c_3 \ge \max\{8c_1, 4c_2, c_4\}, 8c_1 \ge \max\{4c_2, c_4\}$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^4 = (3{,}0{,}3{,}0)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^4 = (3{,}0{,}3{,}0)$ имеют вид (9) и

$-3 \le k_1 \le 12, 0 \le k_2 \le 7, -3 \le k_3 \le 0, 0 \le k_4 \le 1.$ (13)

Выразив из (9) $k_1 = -2k_2 - 4k_3 - 8k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^1 и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = (-2k_2 - 4k_3 - 8k_4)c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_2(c_2 - 2c_1) + k_3(c_3 - 4c_1) + k_4(c_4 - 8c_1) \le 0.$

5) Пусть $c_4 \ge \max\{8c_1, 4c_2, 2c_3\}, 4c_1 \ge \max\{2c_2, c_3\}$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^5 = (7{,}0{,}0{,}1)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^5 = (7{,}0{,}0{,}1)$ имеют вид (9) и

$-7 \le k_1 \le 8, 0 \le k_2 \le 7, 0 \le k_3 \le 3, -1 \le k_4 \le 0.$ (14)

Выразив из (9) $k_1 = -2k_2 - 4k_3 - 8k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^1 и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = (-2k_2 - 4k_3 - 8k_4)c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_2(c_2 - 2c_1) + k_3(c_3 - 4c_1) + k_4(c_4 - 8c_1) \le 0.$

6) Пусть $c_4 \ge \max\{8c_1, 4c_2, 2c_3\}, 2c_2 \ge \max\{4c_1, c_3\}$, Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^6 = (1{,}3{,}0{,}1)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^6 = (7{,}0{,}0{,}1)$ имеют вид (9) и

$-1 \le k_1 \le 14, -3 \le k_2 \le 4, 0 \le k_3 \le 3, -1 \le k_4 \le 0.$ (15)

Заметим, что из условия (9) следует, что k_1 не может быть нечетным числом, в частности, не может равняться -1.

Выразив из (9) $k_2 = -\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4$, подсчитаем приращение для любой допустимой вариации вектора X^6 и убеждаемся в выполнении достаточного условия оптимальности:

$\varDelta F = k_1c_1 + \left(-\frac{1}{2}k_1 - 2k_3 - 4k_4\right)c_2 + k_3c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \frac{1}{2}c_2\right) + k_3(c_3 - 2c_2) + k_4(c_4 - 4c_2) \le 0.$

7) Пусть $c_4 \ge \max\{8c_1, 4c_2, 2c_3\}, c_3 \ge 2c_2 \ge 4c_1$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^7 = (1{,}1{,}1{,}1)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^7 = (1,1,1,1)$ имеют вид (9) и
$-1 \leq k_1 \leq 14, -1 \leq k_2 \leq 6, -1 \leq k_3 \leq 2, -1 \leq k_4 \leq 0.$ (16)

Заметим, что из условия (9) следует, что k_1 не может быть нечетным числом, в частности, не может равняться -1. Если $k_2 \geq 0$, то выразив из (9) $k_3 = -\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 - 2k_4$, получим оценку приращения для любой допустимой вариации вектора X^7:

$$\Delta F = k_1c_1 + k_2c_2 + (-\tfrac{1}{4}k_1 - \tfrac{1}{2}k_2 - 2k_4)c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \tfrac{1}{4}c_3\right) + k_2\left(c_2 - \tfrac{1}{2}c_3\right) + k_4(c_4 - 2c_3) \leq 0.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $k_2 = -1$, то есть $k_3 = -\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{2} - 2k_4$.

Поскольку число k_3 должно быть целым числом, то значениями k_1 могут быть лишь числа 2,6,10,14, то есть $k_1 = 2 + 4l, l = \overrightarrow{0,3}$. С учетом этого получим оценку для приращения

$$\Delta F = k_1c_1 - c_2 + \left(-\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{2} - 2k_4\right)c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \tfrac{1}{4}c_3\right) + \tfrac{1}{2}c_3 - c_2 + k_4(c_4 - 2c_3) = 2c_1 - c_2 + 4l\left(c_1 - \tfrac{1}{4}c_3\right) + k_4(c_4 - 2c_3) \leq 0.$$

8) Пусть $c_4 \geq \max\{8c_1, 4c_2, 2c_3\}, c_3 \geq 4c_1 \geq 2c_2$. Покажем, что в этом случае оптимальным будет вектор $X^8 = (3,0,1,1)$.

Действительно, условия (3) для допустимой вариации вектора $X^8 = (3,0,1,1)$ имеют вид (9) и
$-3 \leq k_1 \leq 12, 0 \leq k_2 \leq 7, -1 \leq k_3 \leq 2, -1 \leq k_4 \leq 0.$ (17)

Заметим, что из условия (9) следует, что k_1 не может быть нечетным числом, в частности, не может равняться -1 и -3. Если $k_1 \geq 0$, то выразив из (9) $k_3 = -\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 - 2k_4$, получим оценку приращения для любой допустимой вариации вектора X^8:

$$\Delta F = k_1c_1 + k_2c_2 + (-\tfrac{1}{4}k_1 - \tfrac{1}{2}k_2 - 2k_4)c_3 + k_4c_4 = k_1\left(c_1 - \tfrac{1}{4}c_3\right) + k_2\left(c_2 - \tfrac{1}{2}c_3\right) + k_4(c_4 - 2c_3) \leq 0.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $k_1 = -2$, то есть $k_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_2 - 2k_4$, Поскольку число k_3 должно быть целым числом, то значениями k_2 могут быть лишь числа 1,3,5,7, то есть $k_2 = 1 + 2l, l = \overrightarrow{1,3}$. С учетом этого получим оценку для приращения

$$\Delta F = -2c_1 + (1 + 2l)c_2 + (-2l - 2k_4)c_3 + k_4c_4 = (c_2 - 2c_1) + 2l(c_2 - 2c_3) + k_4(c_4 - 2c_3) \leq 0.$$

Литература

1.Карманов В.Г. Математическое программирование. Учебное пособие. М.: Наука, 2000.
2.Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз,1961.
3.Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука,1969.
4.Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. – ЖВММФ, 1962, т.2, №6, с.1132 – 1139.
5.Савельев В.П. Оптимизация производства в смысле ритмичности и минимального числа переключений режимов работы // Вестник ННГУ. 2007. № 4.С.115-119.
6.Savelyev V.P. A Problem of Rhythmical Production. VI International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2015), Petrovac, Montenegro, September 2015. PROCEEDINGS, Moscow, pp.156 – 157.
7.Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.