ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION

Моделирование оптимизационной задачи на гиперграфах

Салпагаров Солтан Исмаилович, кандидат физико-математических наук, доцент
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
Российский университет дружбы народов (г. Москва)

Как известно, в современном мире непрерывно возрастает потребность в оптимизации экономических, социальных, информационных и технологических процессов. Основная сложность описания таких процессов заключается в том, что исходные данные, зачастую, слабо структурированы и нечетко представлены. Поэтому, исследование методов оптимизации дискретных задач методами теории графов является актуальной проблемой современного математического моделирования.

Использование теории графов в дискретном моделировании является классическим, позволяющим отражать отношения между различными данными задачи. Но нередко случается так, что с помощью аппарата этой теории не удается достичь полного и адекватного результата, поэтому возникает потребность в использовании аппарата теории гиперграфов [1, с. 298].

В данной работе рассматривается достаточно важная прикладная задача дискретной математики о нахождении системы различных представителей, а также ее формулировка на языке теории гиперграфов.

Формальная постановка задачи о системе различных представителей.

Пусть □ — множество, состоящее из □ элементов, $|S| = m$, а $P(S)$ — множество всех его подмножеств.

Определение. Пусть $M(S) = \{S_1, \dots, S_n\}$ — некоторая совокупность подмножеств из $P(S)$, необязательно различных, $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ — последовательность элементов из S, такая, что все элементы $a_i, i = 1, \dots, n$ различны. Если при этом $a_i \in S_i$, то говорят, что элемент a_i представляет множество S_i , а вся совокупность $\{a_1, \dots, a_n\}$ называется системой различных представителей (СРП) для $M(S)$.

Известно [2, с. 64], что подмножества $S_1, \dots, S_n$ имеют систему различных представителей тогда и только тогда, когда удовлетворяется следующее условие: среди элементов любого конечного числа k множеств S_i , имеется по меньшей мере k различных элементов.

Рассмотрим известную задачу о свадьбах.

Пусть имеется некоторое количество мужчин и женщин. Каждый мужчина знаком с несколькими женщинами. Необходимо женить всех мужчин так, чтобы он сочетался браком только с одной знакомой ему женщиной.

В качестве исходных данных выступают два множества — мужчины и женщины, а также информация о том, какие мужчины и женщины знакомы между собой. Таким образом, каждому мужчине из исходного множества соответствует некоторое подмножество женщин, причем элементы подмножеств (женщины) могут повторяться. Подмножества разбиваются по критерию знакомства и состоят из женщин, знакомых с одним и тем же мужчиной. Рассмотрим это на конкретном примере, для удобства будем обозначать каждого мужчину и женщину номером. Пусть количество мужчин равно семи, а количество женщин — двенадцати.

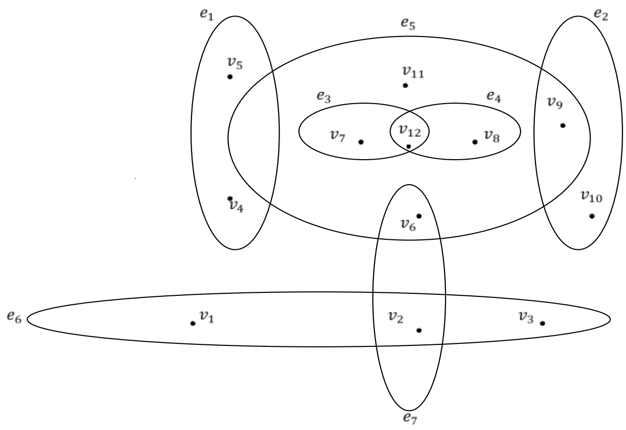
Таблица 1. Соответствие знакомств

Мужчины	Женщины, с которыми знаком мужчина (подмножества S_i)
1	5,4
2	9,10
3	7,12
4	8,12
5	6,7,8,9,11,12
6	1,2,3
7	2,6

Теперь, для каждого мужчины выбираем жен, запоминаем свой выбор, и не повторяем его на следующем шаге: 1-4, 2-9, 3-7, 4-8, 5-6, 6-1, 7-2.

На основании этого выбора имеем систему различных представителей каждого подмножества: $S = \{1,2,4,6,7,8,9\}$.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION



Сформулируем постановку задачи о СРП с применением теории гиперграфов. Исходные данные имеем те же, при этом мужчин будем обозначать в виде ребер, а женщин – в виде вершин см. рис. 1.

Для этого нам необходим гиперграф $G = (V, E)$, где множество всех вершин $\mathrm{V} = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_{12}\}$, $|V| = 12$. Определим семейство его подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_7$, каждое из которых состоит из таких вершин v_i, инцидентных соответствующему ребру e_i, то есть будем иметь подмножества: $V_1 = \{v_4, v_5\}$, $V_2 = \{v_9, v_{10}\}$, $V_3 = \{v_7, v_{12}\}$, $V_4 = \{v_8, v_{12}\}$, $V_5 = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}\}$,$V_7 = \{v_2, v_6\}$.

Условие существование СРП выполняется: для любого из подмножеств $V_i, i = 1, \dots, 7$ существует, по меньшей мере, семь различных представителей, то есть, задача имеет решение. Заключительный этап состоит в выборе из каждого подмножества представителя, заботясь о том, чтобы каждый последующий был отличен от предыдущего: от V_1 выбираем в качестве представителя вершину $v_4, V_2 - v_9, V_3 - v_7, V_4 - v_8, V_5 - v_6, V_6 - v_1, V_7 - v_2$. Таким образом, имеем систему $S = \{v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ различных вершин-представителей для всех ребер гиперграфа.

Отметим, что формулировка задачи о СРП на языке гиперграфов является более наглядной и позволяет использовать наряду с терминами теории множеств, термины теории гипеграфов, что представляет интерес для дальнейшего исследования.

Литература:

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
2. М.Холл Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 420 с.