ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

# Математическое моделирование искажения хода световых лучей в гравитационном поле на примере скалярной звезды

Сафронов Константин Юрьевич
Полномочное представительство Республики Башкортостан
при Президенте Российской Федерации

***Аннотация.*** *С точки зрения Общей теории относительности предполагается, что в гравитационном поле изменяется пространственно-временной масштаб. Вблизи большой массы преломляется ход луча света на определенное количество градусов. Изучив искривление световых лучей в гравитационных полях астрофизических объектов, можно получить уникальную информацию о физической природе этих объектов. В статье представлен математический подход анализа искажения хода световых лучей гравитационным полем астрофизического объекта, обладающего значительным скалярным зарядом.*

***Ключевые слова:*** *математическая модель, нелинейные дифференциальные уравнения, гравитационное поле, скалярная звезда, Общая теория относительности, Python.*

# Mathematical modeling of travel distortion of light rays in a gravitational field on the example of a scalar star

Safronov K.Y.

***Annotation.*** *From the point of view of the General theory of relativity, it is assumed that the space-time scale changes in the gravitational field. Near a large mass, the path of the light beam is refracted by a certain number of degrees. By studying the curvature of light rays in the gravitational fields of astrophysical objects, one can obtain unique information about the physical nature of these objects. The article presents a mathematical approach for analyzing the distortion of the path of light rays by the gravitational field of an astrophysical object with a significant scalar charge.*

***Keywords:*** *mathematical model, nonlinear differential equations, gravitational field, scalar star, General theory of relativity, Python.*

С помощью математического моделирования осуществляется изучение различных природных факторов, имеющих значение для жизнедеятельности человека. Подобные факторы вполне можно описать с помощью математических уравнений, разработать численный метод решения подробных уравнений, составить программу и провести вычислительный эксперимент.

Как правило, для написания программ, посвященным математическому моделированию используется язык программирования Python. Он обладает большим количеством специально написанных для инженерных и математических расчётов оптимизированных библиотек, что весьма удобно в процессе создания математической модели.

В данной статье речь пойдет о математическом моделировании такого природного явления как гравитационное искажение хода луча света с применением нелинейных уравнений теории гравитации.

Уместно подчеркнуть, что современные математические модели, описывающие гравитационные явления в природе используют системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение гравитационного поля Общей теории относительности. Решение подобного уравнения предусматривает метрику, так называемого, статического сферически симметричного безмассового скалярного поля при точечном источнике статически сферически симметричного гравитационного полня массой $M$ со скалярным зарядом $q$. Отсюда следует, что уравнение Эйнштейна и уравнение для безмассового скалярного поля $\Psi$ примут вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{C^4}\left[\nabla_i \Psi \nabla_k \Psi - \frac{1}{2} g_{ik} g^{lm} \nabla_l \Psi \nabla_m \Psi\right],$$

$$g^{lm} \nabla_l \nabla_m \Psi = -4\pi \varrho(\vec{r}),$$

где $\varrho(\vec{r})$ плотность скалярного заряда.

Согласно подходу В.А. Фока, который был рассмотрен в учебном пособии «Теория пространства, времени и тяготения», плотность $\varrho(\vec{r})$ для точечного источника, обладающего скалярным зарядом $q$ обозначается следующим образом[1]:

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{-q}}\, \delta(x^1)\, \delta(x^2)\, \delta(x^3),$$

где $\delta(x^i)$ – дельта-функция определяется в любых координатах соотношением:

$$\int \delta(x^1)\, \delta(x^2)\, \delta(x^3)\, dx^1 dx^2 dx^3 = 1.$$

Исходя из вышеизложенного получим частное решение уравнений:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{C^4}\left[\nabla_i \Psi \nabla_k \Psi - \frac{1}{2} g_{ik} g^{lm} \nabla_l \Psi \nabla_m \Psi\right],$$

$$g^{lm} \nabla_l \nabla_m \Psi = -4\pi \varrho(\vec{r}),$$

которое соответствует следующему выбору ненулевых компонент метрического тензора:

$$g_{00} = A(r),\ g_{rr} = -B(r),\ g_{\vartheta\vartheta} = -C(r),\ g_{\varphi\varphi} = -C(r)\sin^2\vartheta.$$

[1] Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения / В.А. Фок // «ФНМ» 2015. - 576 с.

Представляется, что наиболее оптимально найти первый интеграл уравнения $g^{lm}\nabla_l\nabla_m\Psi = -4\pi\varrho(\vec{r})$, умножив обе его части на $\sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3$ и проинтегрировав по шару радиус *r*. Обратимся к теореме Стокса, соотношению $\int\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)\,dx^1dx^2dx^3 = 1$ и, принимая во внимание сферическую симметрию $g_{ik}$ и поля $\Psi$, получим[2]:

$$\sqrt{\frac{A}{B}}C\Psi' = q,$$

где $'$ штрих означает производную по *r*.

Подставляя это выражение в уравнение:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{C^4}\left[\nabla_i\Psi\nabla_k\Psi - \frac{1}{2}g_{ik}g^{lm}\nabla_l\Psi\nabla_m\Psi\right],$$

получим:

$$\frac{1}{4AB^2C}(2ABCA'' + 2ABA'C' - ACA'B' - BCA'^2) = 0,$$

$$\frac{1}{4A^2BC^2}(-4A^2BCC'' + 2A^2BC'^2 + 2A^2CB'C' - 2ABC^2A'' + AC^2A'B' + BC^2A'^2) = \frac{8\pi Gq^2}{C^4}\frac{B}{AC^2},$$

$$\frac{1}{4AB^2}(4AB^2 - 2ABC'' + AB'C' - BA'C') = 0,$$

Решение этой системы уравнений представляется следующим образом:

$$A_{(r)} = \frac{r^{2a}}{\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}},$$

$$B_{(r)} = \frac{r^{2+3a}}{(r^2+b^2)\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}},$$

$$C_{(r)} = r^{2-2a}\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a},$$

где использовано обозначение:

$$b^2 = \frac{G^2M^2}{C^4} + \frac{4\pi Gq^2}{C^4},\quad a^2 = 1 - \frac{4\pi Gq^2}{C^4b^2}.$$

Представляя полученное выражение в соотношение $\sqrt{\frac{A}{B}}C\Psi' = q$, найдем:

$$\Psi'_{(r)} = \frac{q}{r\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\Psi_{(r)} = \frac{q}{2b}ln\left|\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{\sqrt{a^2+b^2}+b}\right| + \Psi_0$$

Отсюда следует, что метрика, создаваемая статическим сферически симметричным источником, имеющим массу *M* и скалярный заряд *q*, принимает вид:

$$ds^2 = \frac{c^2r^{2a}dt^2}{\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}} - \frac{r^{2+2a}dr^2}{(r^2+b^2)\left[\sqrt{r^2+b^2}-b\right]^{2a}} - r^{2-2a}\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2].$$

Подобная метрика упрощается, когда скалярный заряд соответствует следующему условию:

$$q^2 \ll \frac{M^2G}{4\pi}.$$

В данном случае $b \to GM/c^2$, $a \to 1$ и метрика $ds^2 = \frac{c^2r^{2a}dt^2}{\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}} - \frac{r^{2+2a}dr^2}{(r^2+b^2)\left[\sqrt{r^2+b^2}-b\right]^{2a}} - r^{2-2a}\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2]$ после преобразования радиальной координаты $r = \sqrt{(R-b)^2} - b^2$ принимает вид метрики Шварцшильда в шварцшильдовых координатах[3]:

$$ds^2 = (1 - \frac{2GM}{C^2R})c^2dt^2 - \frac{dR^2}{(1-\frac{2GM}{C^2R})} - R^2[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2].$$

Из этого следует, что при $q^2 \gg M^2G/4\pi$ основной вклад в гравитационное поле вносит масса *M* источника.

Также имеет место быть иной предельный случай, который формируется при условии, когда основную лепту в гравитационное поле вносит тензор энергии импульса скалярного поля:

$$q^2 \gg \frac{M^2G}{4\pi}.$$

В этом случае:

$$b^2 = \frac{4\pi Gq^2}{C^2},\ a = 0$$

метрика $ds^2 = \frac{c^2r^{2a}dt^2}{\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}} - \frac{r^{2+2a}dr^2}{(r^2+b^2)\left[\sqrt{r^2+b^2}-b\right]^{2a}} - r^{2-2a}\left[\sqrt{r^2+b^2}+b\right]^{2a}[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2]$ принимает вид:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{r^2dr^2}{r^2+b^2} - r^2[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2].$$

Далее рассмотрим ее. Для этого составим инварианты тензора кривизны $I_1$ и $I_2$ в соответствии с выражениями, приведенными Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. в учебном пособии «Теория поля»[4]:

$$I_1 = \frac{1}{48}(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\tilde{R}^{iklm}),$$

$$I_2 = \frac{1}{96}(R_{iklm}R^{lmpr}R^{\cdot\cdot ik}_{pr\cdot\cdot} + R_{iklm}R^{lmpr}\tilde{R}^{\cdot\cdot ik}_{pr\cdot\cdot}),$$

где $\tilde{R}^{iklm}$ и $\tilde{R}^{\cdot\cdot ik}_{pr\cdot\cdot}$ дуальные тензоры с помощью антисимметричного аксиального тензора 4-го ранга $E^{iklm}$

$$\tilde{R}^{iklm} = \frac{1}{2}E^{ikpr}R^{\cdot\cdot lm}_{pr\cdot\cdot} = \frac{1}{2\sqrt{-q}}E^{ilpr}R^{\cdot\cdot lm}_{pr\cdot\cdot}.$$

Таким образом, получим:

$$I_1 = \frac{b^4}{4r^8},\ I_2 = -\frac{b^6}{12\,r^{12}}.$$

---

[2] Водопьянов С.К., Молчанова А.О. Теорема Стокса для дифференциальных форм произвольной суммируемости / С.К. Водопьянов, А.О. Молчанова // Вестник КемГУ № 3/1. 2011. – С. 239-243.

[3] Шварцшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории / К. Шварцшильд // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199-207.

[4] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц // 7-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 512 с.

Для данной метрики скалярная кривизна не равна нулю:

R= - $\frac{2b^2}{r^4}$.

Согласно выражениям: $I_1 = \frac{b^4}{4r^8}$, $I_2 = -\frac{b^6}{12\,r^{12}}$ метрика $ds^2 = c^2dt^2 - \frac{r^2dr^2}{r^2+b^2} - r^2[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2]$ не имеет горизонта событий, а обладает особенностью только в точке *r = 0* , что обусловлено выбором точечного заряда в качестве источника скалярного поля.

При *r* = ∞ инварианты тензор кривизна достаточно быстро убывают и метрический тензор $g_{ik}$ стремится к своему псевдоевклидову пределу.

Таким образом, метрика $ds^2 = c^2dt^2 - \frac{r^2dr^2}{r^2+b^2} - r^2[d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2]$ не обладает горизонтом событий и имеет голую сингулярность при *r = 0.*

Однако согласно главной идеи Общей теории относительности – наличие материи вызывает появление отличной от нуля кривизны пространства-времени, которое воздействует на материю, заставляя ее двигаться по геодезическим этого пространства. Из этого следует, что в теории Эйнштейна роль гравитационного поля выполняет метрический тензор псевдориманова пространства-времени[5]. В случае отсутствия действия силы негравитационной природы уравнениями движения для частиц служат уравнения геодезических, которые излагаются в нескольких эквивалентных формах.

Закон движения частиц с массой $m_0$ и уравнения ее траектории в гравитационном поле, описываемом метрическим тензором $g^{ik}$, можно найти на основе метода Гамильтона-Якоби, решая нелинейное уравнение[6]:

$g^{ik}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^k} = m_0c^2$

Уместно подчеркнуть, что когда уравнение допускает применение метода разделения переменных, нахождение его частного решения не составляет труда. Однако в случае, если зависимость метрического тензора $g^{ik}$ от координат и времени не позволяет применить подобный метод, используется уравнение геодезических, которые имеют немного различающийся вид для массивных и безмассивных частиц. В частности, уравнение описывающее геодезическое движение массивной частицы имеет вид:

$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^ku^l = 0$,

где $u^i = dx^i/ds$ – четырехвектор скорости частиц, *ds* – интеграл, $\Gamma^i_{kl}$ - символ Кристоффеля второго рода, причем должно выполняться равенство[7]:

$g_{ik}u^iu^k + 1$.

Основным методом решения системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка $\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^ku^l = 0$ является поиск первых интегралов и сведение этой системы к системе содержащей только уравнения первого порядка.

Действенность подобного способа определяется наличием симметрии в рассматриваемом псевдоримановом пространстве-времени. Несмотря на то, что подобный метод можно назвать эвристическим других методов интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений в настоящее время не существует.

Уравнение геодезической безмассовой частицы в пространстве-времени с метрическим тензором $g_{ik}$ имеет вид:

$\frac{dk^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{ml}k^mk^l = 0$,

где, $\sigma$ - некоторый параметр, $k^i = dx^i/d\sigma$ – 4-вектор касательной к изотропной геодезической, здесь должно выполняться равенство:

$g_{im}k^ik^m = 0$.

Эта система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка решается теми же методами, что и система уравнений для времениподобных геодезических $\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^ku^l = 0$.

Уместно обратить внимание, что уравнения $\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^ku^l = 0$ для массовых частиц выглядят одинаково, независимо от величины массы частиц. Это свойство является одним из проявлений принципа эквивалентности Эйнштейна, согласно которому всем телам в поле тяготения придается одинаковое ускорение. По сути, пространство-время является не просто фоном для событий, оно обладает определенными физическими параметрами в виде метрики и кривизны. Эти параметры способны влиять на процессы и в то же время зависят от них. Так, пространство может искривляться, и его метрика может быть переменной, поэтому именно материя выступает причиной искривления пространства-времени. Чем большей массой и энергией материя обладает, тем сильнее она его искривляет.

Подобные теоретические числовые расчеты в системе Общей теории относительности нашли практическое подтверждение в виде объяснения смещения перигелия Меркурия[8] и релятивистских поправок расчетов координат системы GPS.

Таким образом, математическое моделирование хода световых лучей в гравитационном поле показало, что при проведении прецизионных астрометрических и навигационных измерений угловых положений светящихся звезд на небесной сфере необходимо учитывать искажения, вносимые гравитационным полем скалярных звезд, расположенных на пути лучей. Поэтому алгоритмы измерений и обработки наблюдательных данных должны обеспечивать выявление этих искажений и их устранение средствами вычислительного эксперимента.

**Литература:**

1. Визгин В.П. Релятивистская теория тяготения. Истоки и формирование / В.П. Визгин. 1915 г. - М.: Наука, 1981. - 352 с.

[5] Закирова З.Х. О проективном движении в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа / З.Х Закирова // Уфимский математический журнал. №5(3) 41. 2013. – 290 с.
[6] Wendell H. Fleming. Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations (P.-L. Lions) // SIAM Review. — 1985-06. — Т. 27, вып. 2. — С. 268–269.
[7] Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление / Ю.И. Димитриенко — М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
[8] Wendell H. Fleming. Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations (P.-L. Lions) // SIAM Review. — 1985-06. — Т. 27, вып. 2. — С. 268–269.

2. Водопьянов С.К., Молчанова А.О. Теорема Стокса для дифференциальных форм произвольной суммируемости / С.К. Водопьянов, А.О. Молчанова // Вестник КемГУ № 3/1. 2011. – С. 239-243.
3. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление / Ю.И. Димитриенко — М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
4. Закирова З.Х. О проективном движении в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа / З.Х Закирова // Уфимский математический журнал. №5(3) 41. 2013. – 290 с.
5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц // 7-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 512 с.
6. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения / В.А. Фок // «ФНМ» 2015. - 576 с.
7. Шварцшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории / К. Шварцшильд // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199-207.
8. Wendell H. Fleming. Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations (P.-L. Lions) // SIAM Review. – 1985-06. - Т. 27, вып. 2. – С. 268–269.