

УДК 539-3
ББК 22.251

Решение стационарных задач теории упругости в ANSYS Workbench

Егерова Эльвира Николаевна, доцент кафедры прикладной математики,
 дифференциальных уравнений и теоретической механики
 Саданова Алина Александровна, студентка 1 курса факультета биотехнологии и биологии
 Национальный исследовательский Мордовский институт имени Н. П. Огарёва

Аннотация. Рассматриваются принципы решений двух стационарных задач теории упругости в системе программ ANSYS Workbench, а также преимущества данной программы для моделирования ситуаций, описанных в условиях задач. Выведены сравнения моделей недеформированного и деформированного состояния пластинки с круглым отверстием из изотопного материала в типовой задаче Кирша и полого толстостенного цилиндра в задаче Ляме. Показано, что вышеуказанная система программ удовлетворяет требования для выполнения данных задач и может быть использована при их решении.

Ключевые слова: теория упругости, ANSYS Workbench, задача Кирша, задача Ляме, пластинка с круглым отверстием, полый толстостенный цилиндр, моделирование, внутреннее давление, анализ.

Введение ANSYS — универсальная программа, применяемая для конечно-элементного анализа. Используется для решения линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела и механики конструкций (включая нестационарные геометрически и физически нелинейные задачи контактного взаимодействия элементов конструкций). Также решения ANSYS подходят для проектирования изделий для трехмерной печати из разных материалов, охватывают практически все сегменты инженерной отрасли: от тяжелого машиностроения, оборонной промышленности и аэрокосмической техники до микроэлектроники, медицины и симуляторов для тестирования ПО. Программная система ANSYS разработана в 1970 году корпорацией ANSYS inc. и последние 10 лет широко используется в вышеперечисленных отраслях. Одной из основных отраслей использования ANSYS является теория упругости, в этой статье мы хотим показать результаты применения ANSYS для решения типовых стационарных задач теории упругости — задачи Кирша и задачи Ляме.

Цель работы: Рассмотреть две типовые стационарные задачи теории упругости, используя для программы моделирования условий задач систему ANSYS Workbench. Получить модель конечного результата оказываемого давления на объекты исследования.

Обзор литературы

В плоских задачах теории упругости обычно рассматривают 3 случая упругой деформации твердых тел, которые имеют большое значение в таких отраслях, как механика, теплоэнергетика, авиоконструирование и микроэлектроника. Плоской деформацией называют такое состояние тел, при котором вектор любой точки параллелен некоторой плоскости, которая называется плоскостью деформации. Плоскость деформации не зависит от расстояния от рассматриваемой точки до неё. Всё вышесказанное было описано в работе Савина Г.Н. Механика деформируемых тел.

Для моделирования решения задач по теории плоскости очень часто используют систему программ Mefisto. Эта система была создана во Франции в лаборатории университета Пьера и Марии Кюри. Эта система программ широко использовалась ещё в СССР, и используется по сей день. Главным преимуществом этой программы является удобный интерфейс и низкие системные требования, благодаря чему она используется как учебная. Но кроме преимуществ есть и недостатки, главный из которых — низкая производительность и малый спектр моделируемых ситуаций. Система программ ANSYS не содержит данные недостатки, поэтому набирает более широко используется для инженерных задач.

Решение задачи Кирша. Растяжение в одном направлении пластинки с круглым отверстием.

Материал: тонкая пластинка из однородного изотопного материала с круглым отверстием в центре. Модуль Юнга равен $E = 2 \cdot 10^8 \text{ Па}$, коэффициент распределения Пуассона $\nu = 0.3$. Круглое отверстие по сравнению с размерами пластины более маленькое. Пластинка нагружена постоянным растягивающим усилием $p = 10 \text{ МПа}$. Размеры пластинки $L = 1 \text{ мм}$, радиус отверстия $R = 0.05 \text{ мм}$ (рис 1)

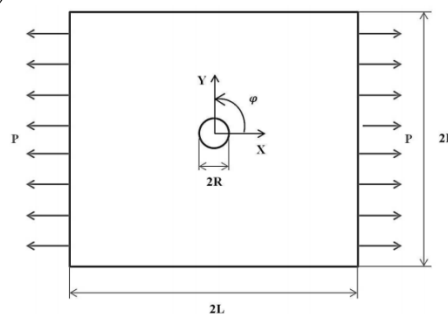


Рис. 1

Структурный анализ задачи включает 4 этапа:

1. Постановка задачи

- 1.1 Выбор типа анализа исходя из особенностей конструкции, свойств материала и условий нагружения
- 1.2 Выбор оптимальной расчетной модели исходя из размерности задачи (2D, 3D), наличия в условии симметрии
- 1.3 Выбор типа элементов

2. Подготовка расчетной модели (preprocessing)

- 2.1 Задание свойств материала
- 2.2 Создание или импорт геометрии. Генерация КЭ сетки

3. Расчет (solution)

- 3.1 Приложение нагрузки и граничных условий
- 3.2 Запуск расчета

4. Обработка результатов (postprocessing)

- 4.1 Просмотр результатов
- 4.2 Проверка адекватности решения
- 4.3 Сохранение результатов.

Теоретическая справка. Для задачи, данной нам в полярных координатах напряжения σ_r (радиальная компонента), σ_φ (окружная компонента) и $\tau_{r\varphi}$ (касательное) определяются формулами:

$$\sigma_r = \frac{p}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right]; \quad (1)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right]; \quad (2)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{p}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi \right]. \quad (3)$$

По границам отверстия (при $r = R$) $\sigma_r = 0$, $\sigma_\varphi = p(1 - 2 \cos 2\varphi)$. Получим число концентрации напряжений:

$$K_\varphi = \frac{(\sigma_\varphi)_{max}}{p} = 3, \text{ при } \varphi = \mp \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Из вышеуказанной формулы видно, что окружное напряжение на границах отверстия в пластине превосходит напряжение в подобной конструкции, но в которой отверстие отсутствовало бы, в 3 раза. Однако, при удалении от отверстия напряжение спадает к границам приложенного давления.

Данная задача решается в плоской (2D) системе с реализацией плоского напряженного состояния. Это возможно только при условиях, что пластинка тонкая и внешняя нагрузка распределяется симметрично относительно средней плоскости пластины по толщине, что соответствует условию $\bar{\sigma}$ и $\bar{n} = \mathbf{0}$, где $\bar{\sigma}$ – тензор напряжений, \bar{n} – вектор нормали к плоскости пластинки (плоскости XY). Вследствие, ввиду геометрической симметрии и прилагаемой нагрузки, в модели, используемой для расчета, возможно рассматривать только одну четвертую пластины, что показано на рис.1

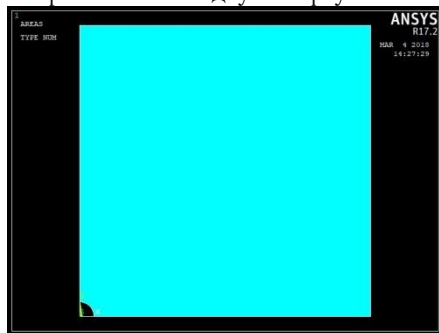


Рис. 2

5) Задание элементов и их свойств. Перед созданием сетки выберем тип элементов, добавив его из библиотеки элементов. В библиотеке найдем группу элементов Structural solid, и в ней выберем четырехузловой элемент Quad 4node 182. В оставшемся окне для этого элемента задается дополнительное свойство плоского напряженного состояния (plane stress).

6) Создание сетки конечных элементов. Необходимо создать соответствующую задаче сетку конечных элементов. Вблизи отверстия ожидаются значительные градиенты напряжений, поэтому в этой области сетка должна быть мельче, чем на периферии, где ожидается однородное поле напряжений. Таким образом, требуется задать переменный размер элементов. Выберем линию и зададим число элементов на каждой стороне. Для прямых, прилегающих к отверстиям, дополнительно задаем параметр сгущения. Для остальных сторон это поле задаем равным 1 или оставляем пустым. Для прямых, прилежащих к отверстию, зададим значения NDIV = 20, SPACE = 0.25; для двух оставшихся прямых зададим NDIV = 10, SPACE = 1; для дуги окружности зададим NDIV = 10, SPACE = 1.

7) Задание нагрузок и граничных условий. К правой границе пластины прикладывается растягивающее усилие, на прямых линиях, прилежащих к отверстию, зададим условия симметрии: UX=0 для горизонтальной и UY=0 для вертикальной соответственно. Необходимо отобразить граничные условия и нагрузки, зафиксировав степени свободы. Приложим растягивающее усилие к правой границе пластины, укажем значение давления (растяжения).

8) Запуск солвера (программного обеспечения, предназначенного для решения рассматриваемой математической задачи). По умолчанию в ANSYS предполагается, что в задаче рассматривается статическая задача с упругими свойствами материалов, поэтому никаких предварительных настроек решателя делать не надо.

9) Обработка полученных результатов. После завершения расчета постпроцессор анализирует результат. Первоначальную оценку результатов на адекватность можно произвести, посмотрев на картину деформаций. Вывести ее на экран

можно, выбрав режим отображения одновременно исходной картины и результат деформации). Если картина деформации выглядит нереалистично, возможна ошибка в постановке задачи либо в значениях заданных при расчете величин. Чтобы получить коэффициент концентрации напряжений ($K\sigma$) ANSYS, на экран нужно вывести поле компоненты напряжений σ_{xx} . По шкале можно определить наибольшее значение напряжений. Использование функции X-component of stress является более универсальным способом для получения наибольшего значения указанной компоненты напряжений. В открывшемся файле в конце будут указаны максимальные и минимальные значения с номерами соответствующих им узлов сетки конечных элементов. Полученное значение коэффициента концентрации напряжений ($K\sigma$) ANSYS будет значительно отличаться от полученного аналитическим путем, а следовательно, потребуется более мелкое разбиение сетки. Для того, чтобы привести сетку в соответствие требуемому разбиению, нужно удалить приложенные граничные условия, которые однозначно связаны с узлами конечных элементов, требующих изменения. Сетку конечных элементов также нужно удалить. Корреляция давления, оказываемого на пластинку, показана на рис. 3.

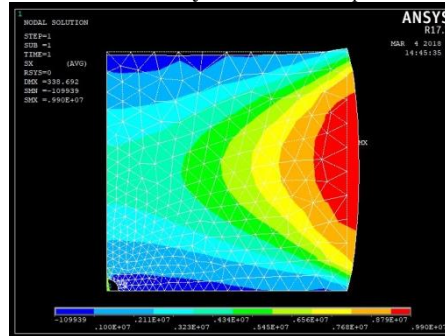


Рис. 3.

Внутреннее давление на полый толстостенный цилиндр. (Задача Ляме).

Материал: полый толстостенный цилиндр из однородного изотопного материала.

Модуль Юнга, как и в предыдущем примере, равен $E = 2 \cdot 10^8 \text{ МПа}$, показатель Пуассона равен $\nu = 0.3$ Внутренний диаметр цилиндра $R_B = 0.5 \text{ м}$, наружный — $R_H = 1.0 \text{ м}$, приложенное внутреннее давление $p = 10 \text{ МПа}$. Предполагается, что цилиндр достаточно длинный, и реализуется плоское деформированное состояние. Требуется с помощью программного комплекса конечно-элементного анализа ANSYS рассчитать напряженно-деформированное состояние цилиндра. Исходные данные на рис. 8

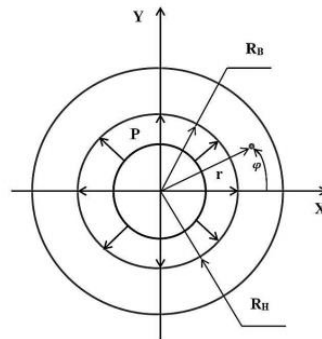


Рис.4

Теоретическая справка. Аналитические выражения для радиальной (σ_r) и окружной (σ_φ) компоненты напряжений в рассматриваемом цилиндре имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left[1 - \frac{R_H^2}{r^2} \right] p; \quad (5)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} \left[1 + \frac{R_H^2}{r^2} \right] p. \quad (6)$$

Отметим, что радиальные напряжения во всей полости цилиндра сжимающие, а окружные, наоборот, растягивающие, причем наибольших по модулю значений напряжение достигает на внутренней поверхности цилиндра (при $r = R_B$):

$$\sigma_r = -p \quad (7)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{R_H^2 + R_B^2}{R_H^2 - R_B^2} p. \quad (8)$$

Известно, что цилиндр длинный, вдали от оснований в цилиндре происходит плоское деформированное состояние ($\bar{\epsilon} = \bar{n} = \mathbf{0}$, где $\bar{\epsilon}$ — тензор деформаций, \bar{n} — вектор нормали к плоскости пластины (плоскости XY)). В физическом смысле это означает, что компонента деформаций $\epsilon_{ZZ} = 0$. В силу присутствия геометрической симметрии и оказываемых деформирующих нагрузок относительно оси z, в расчетной модели рассмотрим только одну четвертую часть поперечного сечения цилиндра.

1) Создадим четверть полого круга. В результате получим геометрию расчетной модели.

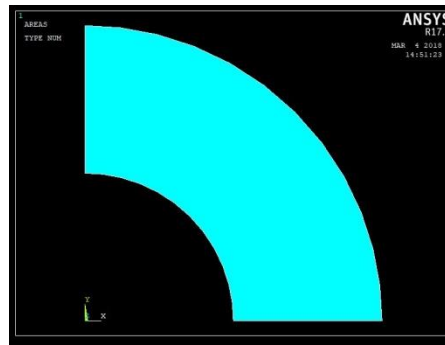


Рис.5

2) Задание элементов и их свойств. Для созданного элемента необходимо задать дополнительное свойство плоского деформированного состояния.

3) Создание сетки конечных элементов.

Необходимо создать соответствующую задаче сетку конечных элементов. Так в силу отсутствия в геометрической модели концентраторов задаваемая нагрузка равномерно распределена по полости цилиндра, то не ожидается концентрации напряжений. Поэтому, переменный размер элементов задавать не требуется. Зададим разбиение линий: по 20 элементов для прямых линий и по 40 для дуг окружностей. Параметр сгущения сетки в данном случае не задается.

Задание нагрузок и граничных условий. К внутренней дуге полости окружности приложено давление, на прямых линиях, прилежащих к отверстию, устанавливаются условия симметрии: $UX=0$ на горизонтальной и $UY=0$ для вертикальной.

4) Запуск солвера.

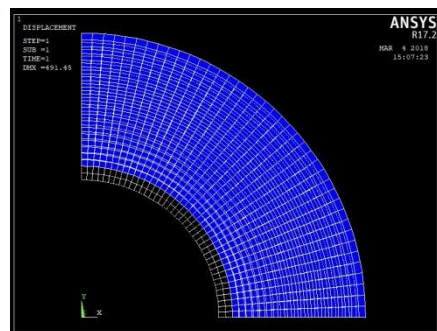


Рис. 6.

В первую очередь оценивается соответствие полученной картины деформаций задаче. В случае, если была получена физически нереалистичная картина, возможна ошибка в постановке задачи либо в значениях заданных при расчете величин. Далее можно переходить к построению графиков. Радиальная компонента напряжений в данном случае не будет зависеть от угла φ в силу симметрии и нагруженности, поэтому график продольной компоненты напряжений σ_x нужно строить при значении $\varphi = 0$. Окружная компонента напряжений не зависит от угла φ , поэтому достаточно построить график компоненты напряжений σ_Y при $\varphi = 0$. На рисунках ниже показаны графики сравнения исходной и полученной оси деформации.

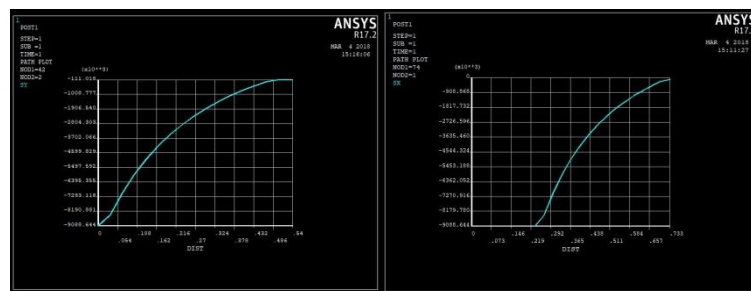


Рис. 7-8

Заключение

На основании разобранных выше примеров (решения задачи Кирша и задачи Ляме) можно сделать вывод о том, что программный комплекс ANSYS Workbench хорошо подходит для решения стационарных задач теории упругости. Использование ANSYS позволяет автоматизировать рутинную деятельность по проведению расчетов и построение геометрии и графиков таких задач, чем значительно упрощает их решение, экономя время и исключая ошибки при вычислениях и геометрических построениях, тем самым увеличивая точность решения. Таким образом, ANSYS Workbench можно рекомендовать к использованию в научно-исследовательских и учебных заведениях при изучении сопротивления материалов и теории упругости, в частности.

Литература:

1. Основы теории упругости: учебное пособие / В.Н. Барашков, И.Ю. Смолина, Л.Е. Путеева, Д.Н. Песцов. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 184 с.
2. С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер «Теория упругости»: Пер. с англ. / Под ред. Г. С. Шапиро. – 2-е изд. - 1979, 560 с.
3. Савин Г.Н. Механика деформируемых тел : Избр. Тр./ [Авт. предисл. А. Н. Гузь] – Киев : Наук. думка, 1979. – 466 с.
4. Иванов Д.В., Доль А.В. И20 Введение в Ansys Workbench: Учеб.-метод. пособие для студентов естественно-научных дисциплин. – Саратов: Амрит, 2016. – 56 с.
5. Литература Елисеев К.В., Зиновьева Т.В. Вычислительный практикум в современных расчетных САЕ-системах: учебное пособие, СПб.: СПбГПУ, 2008, 112 с.