www.esa-conference.ru

УДК 51(09)

Некоторые специальные преобразования рядов

Пулатова М., доц.
Бухарский инженерно – технологический институт

В статье рассматривается интерполяционная задача Л. Эйлера о построении функции для всех положительных целых x, (x=n>0), в результате которой он впервые получил связь между logn и f(x).

In sum considered Euler interpolation problem of constructing a function for all positive integers x, (x=n>0), as a result of which he received the first time the connection between logn and f(x).

Преобразованием рядов Эйлер пользуется очень широко и с необыкновенной виртуозностью. Он не всегда ставит себе целью преобразовать ряд так, чтобы в результате точно найти сумму ряда, а часто стремиться улучшить ряд, то есть сделать его быстрее сходящимся.

Знаменитый метод Эйлера преобразования рядов, рассмотренный в главе III, не является единственным. Почти в каждой работе Эйлера можно найти интересные методы, ведущие к улучшению сходимости.

Рассмотрим ряд таких примеров.

1. В мемуаре E 20, т.14, 1738г. Эйлером поставлена интерполяционная задача: построить функцию такую, чтобы для всех положительных целых $x/\ x = n > 0\ /$

$f(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots \varphi(n)$

Эта задача решается им с помощью формулы / E 613, т.16, 1780г./

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi(n) - \varphi(x+n)]\ (1)$$

для $x > 0$, если $\varphi(x) \to 0$, при $x \to \infty$

В случае $\varphi(n) = \frac{1}{n}$

Эйлер получает $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)} = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$

/последний результат рассмотрен раннее/.

Пользуясь полученной формулой, он находит

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2$

когда же

$\varphi(n) = \sqrt{n}$

или

$\varphi(n) = \log n,$

то стоит вопрос о сходимости полученного ряда, суммой которого является$f(x)$.

В этом случае, Эйлер помогает себе замечательным образом.

Функцию$\varphi(x+n)$Эйлер записывает в виде ряда по правилу исчисления конечных разностей

$\varphi(x+n) = \varphi(n) + x[\varphi(n+1) - \varphi(n)] + \frac{x(x-1)}{2}[\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n)] + ..$

откуда

$0 = [\varphi(n) - \varphi(x+n)] + x[\varphi(n+1) - \varphi(n)] + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}[\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n)] + \ldots (*)$

Тогда в качестве$f(x)$Эйлер берёт следующее выражение

$$f(x) = x\varphi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[\varphi(n) - \varphi(x+n)] + x[\varphi(n+1) - \varphi(n)]\}\ (2)$$

Если

$\lim_{n\to\infty} [\varphi(n+1) - \varphi(n)] = 0,$

то для каждого целого положительного $x = n > 0$

$f(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$

Для того, чтобы обеспечить сходимость ряда (2), являющегося новым выражением для $f(x)$, при всех положительных x , необходимо ещё одно условие, которым является например монотонность $\varphi''(x)$.

Для дальнейшего улучшения сходимости Эйлер даёт новые выражения для$f(x)$. Если сходится хотя бы один из получившихся рядов, то сходятся и все следующие и при этом к той же функции. Используя например три первых члена ряда (*), Эйлер получает

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$f(x) = x\varphi(1) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}[\varphi(2) - \varphi(1)] +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[\varphi(n) - \varphi(x+n)] + x[\varphi(n+1) - \varphi(n) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}[\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n)]\right\} \quad (3)$$

Пользуясь этими формулами для $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, Эйлер получил из формулы (1)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 9} + \cdots$$

и из формулы (3)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right.$$

Как видно, ряд полученный из формулы (3), сходится значительно быстрее.

С помощью полученных рядов, Эйлер находит значение функции $f(x)$ для промежутка $0 < x < 1$, а затем находит остальные значения, используя функциональное уравнение

$f(x+1) = f(x) + \varphi(x+1)$

Применяя формулу (3) для

$\varphi(n) = \log n$

Эйлер получает

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)^x n^{1-x}}{x+n}$$

и обозначает $f(x) = \log[x]$, где представленный как произведение символ

$[x] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^x n^{1-x}}{x+n}$ т.е. $[x] = \Gamma(x+1)$(в современных обозначениях)

Таким образом, Эйлер получает связь между $\log n$ и $\Gamma(x)$.

2/ Для улучшения сходимости рядов Эйлер предлагает делать различные подстановки.

а) пусть дан ряд:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

если $x = y(1-y)$

тогда $y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \ldots = \frac{y-y^2}{1-y+y^2}$

б) пусть дан ряд:

$$S = a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}, (4)$$

если $x = \frac{y}{\sqrt{1-by^2}}$,

тогда $x^2 = \frac{y^2}{1-by^2} = y^2 + by^4 + b^2y^6 + b^3y^8 + \ldots$

$$S\cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} = S\frac{y}{\sqrt{1-by^2}}$$

$$S\frac{y}{\sqrt{1-by^2}} = a_1y^2 + ba_1y^4 + b^2a_1y^6 + b^3a_1y^8 + \cdots$$

$$+a_2y^4 + 2ba_2y^6 + 3b^2a_2y^8 + \ldots$$

$$+a_3y^6 + 3ba_3y^8 + \ldots$$

$$+a_4y^8 + \ldots$$

$$S\frac{1}{\sqrt{1-by^2}} = a_1y + (ba_1 + a_2)y^3 + (b^2a_1 + 2ba_2 + a_3)y^5 + \ldots (5)$$

Если S известно, то известна и сумма ряда (5).

Если же легко найти сумму ряда (5), то будет известна и сумма ряда (4).

в) Интересен приём преобразования рядов для улучшения сходимости, который Эйлер применяет при приближённом вычислении ряда

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Е 25, т.14, 1738г./

Как раньше показано, см. стр 33, Эйлер получил, что

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$S_2 = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt$$

но, чтобы улучшить приближённое вычисление суммы этого ряда, он поступает следующим образом:

$$S_2 = -\left[\int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt + \int_x^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt\right]$$

$0 < x < 1$

Во втором интеграле делаем замену переменной

$t = 1-\tau$ и $y = 1-x$

$$S_2 = -\int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt + \int_0^y \frac{\ln(1-\tau)}{-\tau}\,d\tau = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n \ln t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y \frac{\tau^{n-1}}{n}\,d\tau$$

Поясним последнее равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n \ln t\,dt = \int_0^x \ln t\,(\sum_{n=0}^{\infty} t^n)dt = \int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y \frac{\tau^{n-1}}{n}\,d\tau = \int_0^y \frac{1}{\tau}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n})\,d\tau = -\int_0^y \frac{\ln(1-\tau)}{\tau}\,d\tau$$

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty}\tau^{n-1} = \frac{1}{1-\tau}\quad S = \int_0^{\tau}\frac{1}{1-\tau}\,d\tau = -\ln(1-\tau)$$

$$S_2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n \ln t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y \frac{\tau^{n-1}}{n}\,d\tau =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\;\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\,dt\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n^2}\;\Big|_0^y = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\Big|_0^x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2} =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n}\ln t - \frac{t^n}{n}\right)\Big|_0^x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\ln x\right) - \lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n \ln t}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^n \ln t}{n} = 0\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\ln x\right) = \ln x\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = \ln x\,\ln(1-x)$$

Следовательно:

$$S_2 = \ln x\cdot\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2}$$

Вместо x и y можно брать любые числа, лежащие между 0 и 1, $x + y = 1$

Следовательно, для вычисления суммы ряда S_2 Эйлер получил ряд, сходящий значительно быстреею

Пусть

$$x = y = \frac{1}{2}$$

Тогда

$$S_2 = (\ln 2)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{4^2} + \ldots = (\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}$$

3/ Для степенных рядов Эйлер также часто применяет различные преобразования.

а) Пусть дан ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Коэффициенты ряды являются функциями от n

$a_n = f(n)$

Следовательно:

$$a_n = f(n) = f(0) + f'(0)n + \frac{f''(0)}{2!}n^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{n^k}{k!}$$

Подставив выражение для коэффициентов и приведя подобные, Эйлер получает

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0)[1 + x + x^2 + \ldots] + f'(0)[x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots] + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}[x + 2^n x^2 + 3^n x^3 + \ldots] + \ldots = \frac{f(0)}{1-x} + \frac{f'(0)x}{(1-x)^2} + \frac{f''(0)(x^2+x)}{2!\,(1-x)^3} + \frac{f'''(0)(x^3+4x^2+x)}{3!\,(1-x)^4} + ..$$

/ E 55, т.14, 171г.; E 617, т.16, 1768г./

б) Эйлер раскладывает в ряд функцию:

$$tg\frac{\pi}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x^n$$

и ищет не неизвестные коэффициенты, а первоначально улучшает сходимость ряда и находит коэффициент другого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n x^n = tg\frac{\pi}{2}x - \frac{4x}{\pi(1-x)^2}$$

Литература:

1.Euleri L. De seriebus divergentibus, Novi comment. Acad.Sci Imp Petrop, 1760. Opera Omnia, ser I, vol 14.
2.Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.-Л., ГТТИ, 1949
3.Паплаускас А. «Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега». М.: Наука, 1966.
4.Харди Г. Расходящиеся ряды. Изд-во ИЛ.М., 1951