

# Потребительская корзина в условиях неопределенной инфляции

Попов Владимир Александрович, к.ф.-м.н., доцент  
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (г. Москва)

**Аннотация.** Показано, что инфляцией на потребительском рынке можно управлять, снижая ее темпы и уменьшая инфляционные риски. Сущность подхода заключается в том, чтобы рассматривать риски ингредиентов потребительского набора, как составляющую единой потребительской корзины, а не отдельно взятых единиц. В центре внимания предлагаемой стратегии управления находится уровень корреляций ценовых ростов товаров потребительского набора.

**Ключевые слова:** потребительская корзина, инфляционные риски, корреляция роста цен.

## Consumer Basket under uncertain inflation

Popov V.A., PhD in mathematics, associate professor  
Financial University under Government of Russian Federation

**Abstract.** This paper demonstrates that inflation on the consumer market can be managed by reducing its rate and lowering inflation-related risks. An approach is introduced based on treating the inflation risks of particular ingredients of the consumer goods basket as components of the whole complex rather than separate units. The proposed management strategy is focused on the degree of correlation between the rates of price increase of the goods in the basket.

**Keywords:** consumer market, inflation risk, correlations of prices increase.

**Введение.** Учёт инфляционных процессов играет большую роль как при планировании расходов домашних хозяйств так и в бизнесе. Однако этот учёт, как правило, опирается только на предсказания уровня инфляции и не рассматривает случайный характер и взаимосвязь цен различных товаров потребительской корзины (ПК).

В работах А. Каулеса [1] и Воркинга [2], оперировавшими данными рынка акций и с ценами товаров содержится богатый статистический материал и неожиданный вывод, что, скорее всего, величины  $h_k = \ln \frac{N_k}{N_{k-1}}$  логарифмов приращений цен  $N_k$ ,  $k \geq 1$ , являются независимыми. Практический вывод из этих работ, состоящий в том, что последовательность  $H_k = h_1 + h_2 + \dots + h_k$  носит характер «случайного блуждания» (т.е. является суммой независимых случайных величин), не согласуется с бытовавшим среди практиков мнением, что цены подчиняются некоторым ритмам, циклам, трендам.

Этот вывод нашёл своё подтверждение в работе М. Кендала [3], вызвавшей интерес к углублённому изучению динамики финансовых показателей и построению вероятностных моделей, объясняющих наблюдаемые эффекты, такие, например, как кластерность. Отметим работы Г. Робертса [4] и М Осборна [5], содержащие эвристические аргументы в пользу гипотезы случайного блуждания.

Вероятностная модель динамики финансовых показателей получила блестящее развитие в работе П. Самуэльсона [6], введшего в финансовую теорию и практику геометрическое (или, как он говорил, экономическое) броуновское движение. Именно Самуэльсон в 1965 г. явно сформулировал гипотезу эффективного рынка, показав математически, что ожидаемые цены меняются случайным образом. Используя предположения о рациональном поведении трейдеров и об эффективности рынка, он продемонстрировал, что ожидаемая величина цены актива в момент  $t + 1$  связана с предшествующими ценами  $N_0, N_1, \dots, N_t$  посредством соотношения  $E(N_{t+1}/N_0, N_1, \dots, N_t) = N_t$  (левая часть равенства – условное математическое ожидание). Статистические процессы, подчиняющиеся этому вероятностному условию, называются мартингалами. Понятие мартингала есть интуитивно вероятностная модель «справедливой игры». С точки зрения игрока игра является справедливой, когда выигрыши и проигрыши взаимно компенсируются и ожидаемое накопление игрока равно его текущим активам. Теория справедливой игры относительно ценовых изменений, наблюдаемых на финансовом рынке, утверждает, что не существует способа получения прибыли на актив посредством использования истории ценовых флуктуаций. Вывод из этой формулы гипотезы эффективного рынка состоит в том, что ценовое изменение невозможно предсказать по историческому временному ряду изменений этих цен за прошедшие периоды времени.

Сформулируем более чётко: эффективность означает, что рынок рационально реагирует на обновление информации. Под этим подразумевается следующее.

1. На рынке мгновенно производится коррекция цен, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии равновесия, становятся справедливыми, не оставляя место участникам рынка для арбитражных возможностей.
2. Участники рынка (трейдеры, инвесторы,...) однородно интерпретируют поступающую информацию и при этом мгновенно корректируют свои решения при её обновлении.
3. Участники рынка однородны в своих целевых устремлениях, их действия носят коллективно рациональный характер

Эмпирические исследования для проверки гипотезы эффективного рынка, выполненные в 60 – 70 г.г. прошлого века, показали, что корреляция между ценами очень мала. Это подтверждало гипотезу. Однако в 80-х годах было показано, что использование информации, представленной во временных рядах, таких как отношение *прибыль/цена* позволяет прогнозировать прибыль актива недостаточно длительное время (больше месяца). На сегодня эмпирические данные и теоретические исследования показывают, что ценовые изменения невозможно прогнозировать, если исходить из временного ценового ряда. Это отнюдь не означает, что реальный рынок идеально эффективен. Ряд цен несёт большое количество нежимаемой информации. ввиду чего трудно определить воздействие на цены фундаментальных экономических факторов. Когда конкретная информация влияет на рыночную цену, рынок уже не вполне эффективен. Это позволяет выявить во временном ряде влияние такой информации. В подобных случаях может быть выработана определённая арбитражная стратегия, и она будет оставаться прибыльной до тех пор, пока рынок не станет вполне эффективным в результате использования трейдерами всей новой информации в процессе формирования цен.

В 1952 г. была опубликована знаменитая работа Г. Марковица [7], заложившая основы теории ценных бумаг, посвящённая проблеме оптимизации инвестиционных решений в условиях неопределённости и риска. Вероятностный анализ, именуемый *mean-variance* (средне-дисперсионный анализ), выявил исключительно важную роль корреляций доходностей активов портфеля как ключевого ингредиента, от которого зависит степень риска создаваемого набора ценных бумаг. В теории Марковица особенно привлекательной для инвестора оказалась идея диверсификации при формировании портфеля, поскольку она не только объясняла принципиальную возможность редуцирования систематического рынка инвестирования, но и давала практические рекомендации, как это сделать.

**2. Применение теории портфеля Марковица.** Существует глубокая аналогия между тем, как инвестор формирует свой портфель ценных бумаг и тем как индивид наполняет свой потребительский набор. В первом случае инвестор стремится максимально снизить инвестиционные риски при сохранении приемлемой доходности, во втором случае, в условиях инфляционной экономики, обыватель пытается как можно больше уменьшить инфляционный риск при условии всё же удовлетворения необходимых потребностей. Показано, что инфляцией на потребительском рынке можно управлять, снижая её темп (на значительное количество базисных пунктов и даже процентов) и, что существенно, уменьшая инфляционный риск (риск того, что инфляция вырвется за границы определённого расчётного интервала). Идея подхода (во многом близкая к инвестиционной идее Марковица) состоит в том, чтобы рассматривать инфляционные риски ингредиентов потребительской корзины (ПК) как составляющих единого набора, а не отдельно взятые единицы. В центре внимания предлагаемой стратегии управления находятся корреляции темпов ценовых ростов товаров потребительского набора. При наличии инфляции цены на потребительском рынке растут, но рост стоимости одного товара оказывает влияние на рост стоимости другого. Если рассматривать товары как составляющие потребительского набора, то даже при наличии значительных инфляционных рисков для каждого из них совокупный риск корзины товаров может оказаться небольшим, важно только правильно определить пропорции (доли) ингредиентов в стоимости ПК. Существенно, что процесс потребительской диверсификации можно реализовать на базе строгой математической модели, и найденные значения параметров оптимального потребительского набора будут верны в той мере, в какой верна идея предлагаемого подхода. В данной статье получает развитие подход авторов к исследованию инфляции на потребительском рынке [8], [9], а также исследования в работах [10 – 17].

Мы рассматриваем относительные изменения цен  $a_{in} = \frac{p_{in} - p_{i0}}{p_{i0}} \cdot 100\%$  на различные товары за  $n$  периодов как нормально распределённые случайные величины со средними значениями  $E_{in} = E(a_{in})$ , средне квадратичными отклонениями  $\sigma_{in} = \sqrt{D(a_{in})}$  и корреляционной матрицей  $\rho_{ijn} = \rho(a_{in}; a_{jn})$ . Изменение стоимости потребительской корзины (уровень инфляции) за  $n$  периодов вычисляется по формуле  $H_{ПК} = \mu_1 a_{1n} + \mu_2 a_{2n} + \dots + \mu_k a_{kn}$ , где  $\mu_i$  – доля  $i$ -го товара в ПК,  $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ . Ожидаемая инфляция и дисперсия величины  $H_{ПК}$  вычисляются по формулам

$$\begin{cases} E(H_{ПК}) = \sum_{i=1}^k \mu_i E_{in} \\ D(H_{ПК}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho_{ijn} \sigma_{in} \sigma_{jn} \mu_i \mu_j \end{cases} \quad (1)$$

Где  $\sigma_{in}, \sigma_{jn}$  – средние квадратичные отклонения величин  $a_{in}$  и  $a_{jn}$ .

Рассмотрим среднюю инфляцию  $h_{ПК} = \frac{1}{n} H_{ПК}$  и средний темп инфляции  $b_i = \frac{1}{n} a_{in}$   $i$ -й составляющей потребительского набора за период. Пусть  $E(h_{ПК}) = \frac{1}{n} E(H_{ПК}) = \bar{h}_{ПК} = E$  – ожидаемая средняя инфляция за период,  $E(b_i) = \frac{1}{n} E(a_{in}) = E_i$  – ожидаемый средний темп инфляции  $i$ -й составляющей потребительского набора за период,  $\sigma(b_i) = \sigma_i$ ,  $\rho(b_i; b_j) = \rho_{ij}$ . Тогда формулы (1) примут вид.

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = 1 \\ E = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \dots + \mu_k E_k \\ \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \mu_i \mu_j} \end{cases} \quad (2)$$

Варьируя параметры  $\mu_i$ , можно понижать ожидаемый уровень инфляции  $E$  и с заданной вероятностью найти доверительный интервал величин  $h_{ПК}$  и  $H_{ПК}$ .

В частности, для ПК, состоящей из двух видов товаров, система (2) примет вид

$$\begin{cases} E = \mu E_1 + (1 - \mu)E_2 \\ \sigma = \sqrt{\mu^2 \sigma_1^2 + (1 - \mu)^2 \sigma_2^2 + 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \mu(1 - \mu)} \quad (3) \\ \mu \in [0; 1], \rho \in [-1; 1] \end{cases}$$

Система уравнений (3) – это параметрическое задание (в зависимости от значений параметра  $\mu$ ) функциональной зависимости  $E = f(\sigma)$ . Если  $\mu \neq 1$  или  $\mu \neq -1$ , то отображающая эту зависимость кривая является гиперболой, ветви которой направлены в сторону возрастания  $\sigma$ . Координаты её вершины (пропорции ПК в точке наименьшего риска ( $E_{min}; \sigma_{min}$ )) легко определить, используя стандартные методы математического анализа. В результате получим

$$\mu_{1min} = \mu_{min} = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}, \mu_{2min} = 1 - \mu_{min} = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2},$$

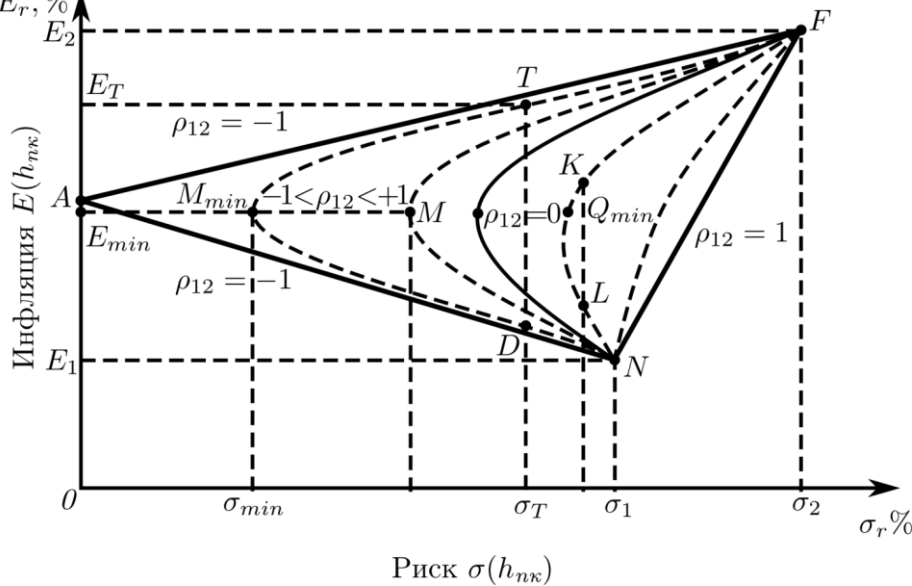


РИС. 1. Значения комбинации «риск – инфляция» при систематическом изменении структуры потребительской корзины и при альтернативных корреляциях между ингредиентами.

Если мы поставим задачу, не менять значения  $E_1, E_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{12}$ , то необходимо изменить пропорции потребления  $\mu_1 = \mu, \mu_2 = 1 - \mu$ . Рассмотрим следующий модельный пример. Прогнозные значения среднемесячного роста цен составляют  $E_1 = 0,65\%$  по первому товару и  $E_2 = 0,99\%$  по второму. Риск отклонения от ожидаемого темпа инфляции по первому товару прогнозируем  $\sigma_1 = 3,23\%$  и  $\sigma_2 = 4,86\%$  по второму. Корреляцию между уровнями инфляции первого и второго ингредиентов прогнозируем как  $\rho_{12} = 0,39$ . Схема потребления базисного периода предполагает, что 0,7 стоимости ПК тратится на первый товар,  $\mu_1 = 0,7$ , и 0,3 стоимости ПК на второй,  $\mu_2 = 1 - \mu = 0,3$ . Отсюда, на основании (3)  $E = 0,75\%$  и  $\sigma = 3,12\%$ . На рис. 1 отмечаем точку  $K$ , координаты которой соответствуют найденным значениям уровня инфляции и риска ПК. Стандартное отклонение уровня инфляции  $E$  вычисляем по формуле  $\bar{\sigma} = \frac{E\% \cdot \sigma\%}{100}$  и получаем  $\bar{\sigma} = \frac{0,75 \cdot 3,12}{100} = 0,02\%$ . При этом среднегодовой темп инфляции составит  $E_{год} = 12E = 8\%$ . Риск отклонения от годового ожидаемого темпа инфляции определяется как  $\sigma_{год} = \sigma \cdot \sqrt{12} = 3,12 \cdot \sqrt{12} = 10,81$ . Отсюда, годовое стандартное отклонение  $\bar{\sigma}_{год} = \frac{9 \cdot 10,81}{100} = 0,97\%$ . Тогда, по «правилу трёх сигм» практически гарантированный прогноз годовой инфляции (доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,9973) будет находиться в промежутке  $H_{ПКгод} \in (6,08\%; 11,92\%)$ .

Прогноз мог бы оказаться удачнее, если бы параметры соответствовали координатам точки  $Q_{min}$ , лежащей на дуге  $NLQ_{min}KF$  (выбор именно этой дуги жёстко фиксирован данными прогноза). Но для этого пришлось бы изменить схему распределения пропорций товаров по сравнению со структурой базисного периода. С учётом (4)  $\mu_{1min} = 0,8; \mu_{2min} = 0,2$ . Откуда  $h = E_{min} = 0,72; \sigma = \sigma_{min} = 3,1\%$ , что является более удачным результатом. Найдём практически гарантированный годовой прогноз инфляции.  $E_{год} = 12E = 12 \cdot 0,72 = 8,64\%; \sigma = 0,02; \sigma_{год} = \frac{8,64 \cdot 10,81}{100} = 0,93\%; h_{ПКгод} \in (0,68\%; 0,78\%); H_{ПКгод} \in (5,86\%; 11,42\%)$ .

Ещё соблазнительнее было бы перейти в точку  $L$ , где риск такой же, как и в точке  $K$ , но инфляция существенно меньше. Однако такой прогноз ещё более меняет схему потребления по сравнению с базисной и сильнее увеличивает пропорцию первого ингредиента за счёт второго. Значительное же изменение структуры потребления, очевидно, лимитировано жизненными потребностями потребителя, его привычками и, вряд ли приемлемо. Если, меняя структуру потребления, двигаться вдоль пути  $FTM_{min}DN$  (это нагляднее, чем движение вдоль пути  $FKQ_{min}LN$ ) от точки  $M_{min}$  к точке  $D$ , то можно значительно снизить прогнозный уровень инфляции  $E$ , но риск отклонения  $E$  сильно возрастает. Видимо, существует такой оптимальный инфляционный темп  $E_{min}$ , для которого инфляционный риск  $\sigma_{min}$  минимален. Такого рода прогноз соответствует наибольшей устойчивости потребительского рынка.

**3. Применение теории портфеля Тобина.** В предыдущих рассуждениях, использующих теорию портфеля Марковица, предполагается положительная определённая корреляционная матрица  $(\rho_{ij})$ . Это предположение во многих случаях выполняется для портфеля ценных бумаг и может быть применено для определённых наборов из потребительской корзины. В общем случае корреляционная матрица инфляционных рисков вырождена. Дело в том, что для многих товаров и услуг инфляция или отсутствует (и течение рассматриваемого периода) или повышение цен строго регулируется, тем самым не имеет инфляционного риска. Объединим эти товары и услуги в одну корзину и назовём её безрисковой составляющей потребительского рынка. В теории портфеля модель с безрисковой составляющей изучена и носит название портфеля Тобина.

Разделим ПК на безрисковую часть (инфляция которой заранее предопределена) с долей  $x_0$  и инфляционным ожиданием  $\mu_0$  и рыночную часть. Составляющие рыночной части имеют доли  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , инфляционные ожидания  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  и риски  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Элементы корреляционной матрицы рыночных составляющих обозначим через  $\rho_{ij}$ . Инфляционное ожидание всей потребительской корзины в целом и её инфляционный риск вычисляются по формулам

$$\mu = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j,$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$$

При исследовании портфеля ценных бумаг мы стремимся максимизировать доходность  $\mu$ . При исследовании же потребительской корзины мы стремимся минимизировать уровень инфляции  $\mu$ . Уравнение минимальной границы

имеет вид  $\sigma^2 = \left(\frac{\mu - \mu_0}{d}\right)^2$ . Однако, если в случае портфеля ценных бумаг ожидаемая доходность рыночного актива  $\mu_i$  должна быть не меньше доходности безрискового актива, т.е.  $\mu_i \geq \mu_0$ , то для потребительской корзины это условие не выполняется. Более того, общий уровень инфляции ПК часто не превышает уровень инфляции безрискового набора товаров, т.е.  $\mu \leq \mu_0$ . Поэтому уравнение минимальной границы, позволяющее рассчитать минимальный инфляционный риск при предполагаемом уровне инфляции, превращается в следующее линейное уравнение  $\sigma = \frac{\mu_0 - \mu}{d}$ ,

$$\text{Где } d = \sqrt{\alpha \mu_0^2 - 2\beta \mu_0 + \gamma}, \quad \alpha = I^T V^{-1} I, \quad \beta = I^T V^{-1} \bar{\mu}, \quad \gamma = \bar{\mu}^T V^{-1} \bar{\mu},$$

$$V = (\rho_{ij}) - \text{ковариационная матрица рисков составляющих}, \quad I = (1; 1; \dots; 1)^T, \quad \bar{\mu} = (\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_n)^T.$$

Рисковая часть  $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$  потребительской корзины вычисляется по формуле  $X = \frac{\mu_0 - \mu}{d^2} V^{-1} (\mu_0 I - \bar{\mu})$ , а безрисковая часть по формуле  $x_0 = 1 - I^T X$ .

Теория Тобина позволяет находить потребительскую корзину минимального инфляционного риска. Однако такая корзина может не иметь практического применения, так как значительное изменение структуры потребления, очевидно, лимитировано жизненными потребностями потребителя, его привычками и, вряд ли приемлемо. Основное значение приведённых соотношений состоит в том, что основываясь на них, мы можем менять структуру потребления, сравнивая различные корзины и выбирая на основе вычислений наиболее соответствующую нашим потребностям и возможностям и наименее рискованную. Изменение структуры потребления – это задача, которая может быть решена только в рамках государственной политики

**Заключение.** Необходимо отметить, что реализация таких мер, как регулирование потребительского спроса, целенаправленное изменение структуры потребления – это задача, которая может быть решена только в рамках государственной политики. Данный вывод находится в русле взглядов Дж. Кейнса на роль государства в экономическом процессе. По его мнению, государство не должно выполнять в экономике функции, взятые на себя частным бизнесом, но ему следует брать на себя функции, выполнять которые кроме него больше никому. Государство должно использовать свою власть в области налогообложения, расходов и денежной политики при устранении экономической нестабильности. Регулирование ценового роста и инфляционных рисков – это также один из приоритетов государственной политики.

#### Литература:

1. Cowles A. Can stock market forecasters forecast? // *Econometrica*. V. I.P. 309 – 324, 1939.
2. Working H. A random – difference series for use in the analysis of time series. // *Journal of American Statistical Association*. V. 29. P. 11 – 24, 1934.
3. Kendall M.G. The analysis of economic time series. Part 1. Prices // *Journal of the Royal Statistical Society*. V. 96. P. 11 – 25, 1953.
4. Roberts H.V. Stock-market “patterns” and financial analysis. Methodological suggestions // *Journal of Finance*. V. 14. P. 1 – 10, 1959.
5. Osborne M.E.F. Brownian motion in the stock market // *Operations Research*. V. 7. P. 145 – 173, 1959.
6. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // *Industrial Management Review*. V. 6. P. 13 – 31, 1965.
7. Markowitz H. Portfolio selection // *Journal of Finance*. V. 7 (March). P. 77 – 91, 1952.
8. Попов В.А., Семёнов В.П. Метод расчёта инфляции // *Финансовый бизнес*. №4. С. 63 – 69, 2009.
9. Попов В.А., Семёнов В.П. Моделирование инфляционных рисков на потребительском рынке // *Итоги науки. Юг России. Серия «Математический форум»*. Том 4. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. ЮМИ. Владикавказ. 2010.
10. Sukhorukova I.V., Chistyakova N.A. Methodical aspects of actuarial mathematics teaching // *Astra Salvensis*. 2018. T. 6. С. 847-857.



[www.esa-conference.ru](http://www.esa-conference.ru)

11. Popov V.A, (2020) On Crises in Financial Markets., // Journal of Reviews on Global Economics. vol. 9, pp. 68-76.
12. Sukhorukova I.V, Chistyakova N.A., (2018), Economic regulation and mathematical modeling of insurance product cost, // Journal Regional Science Inquiry, Vol. X (2), pp. 195-203
13. Popov V.A, (2018) Inflation and Cash., // Journal of Reviews on Global Economics. vol. 7, pp. 152-156.
14. Sukhorukova I.V, Chistyakova N.A., (2019) Insurance of the termination risk of projects with joint companion activity., // Journal of Reviews on Global Economics. vol. 9, pp. 269-274.
15. Popov V.A, (2018) Inflation and Consumer Basket., // Journal of Reviews on Global Economics. vol. 7, pp. 452-456.
16. Sukhorukova I.V., Chistyakova N.A. Optimization of the Formation of the Capital Structure of the Insurance Company, Taking into Account the National Specifics of Insurance. // Journal of Reviews on Global Economics. 2018. Vol. 7. pp. 146-151.
17. Борцова Т.И., Денежкина И.Е., Попов В.А. Математический анализ. Интегральное исчисление. Учебное пособие для подготовки бакалавров / Москва, 2013.