www.esa-conference.ru

УДК 514.764.2, MSC 53C20

Локально изометричные римановы аналитические многообразия

Попов Владимир Александрович, к.ф.-м.н., доцент
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, (г. Москва)

Аннотация. *Рассматривается алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии M и её стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ не имеет центра, то H замкнута в G. Пусть $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ – ее радикал, а $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$ – ее коммутант. Если $\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g};\mathfrak{g}])=\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебры $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p}+\mathfrak{r}=\mathfrak{g}$ имеет место равенство $(\mathfrak{p}+\mathfrak{z})\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$, то H замкнута в G. Изучается также аналитическое продолжение локально заданного риманова аналитического многообразия.*

Ключевые слова: *риманово многобразие, алгебра Ли, аналитическое продолжение, векторное поле, группа Ли, замкнутая подгруппа.*

Pseudo complete Riemannian Analytic Manifold

Abstract. *Analitic extension of locally given Riemannia mentric is investigated. The notion of generalisation of completeness is defined. Various particular metrics are investigated. We consider Riemannian manifolds where algebra Lie $\mathfrak{g}$ of all Killing vector field has no center and define regular extension, which leads to so called quasycomplete manifold M. This manifold is unextandable, unique in the class of all locally isometric manifolds and posseses all possible symmetries. The notion of pseudocomplete manifold for arbitrary metric is defined.*

Keywords: *Riemannian manifold, Lie algebra, analitic extension, vector field, Lie group, closed subgroup.*

1. Введение. Однородное пространство определяется группой Ли G и её замкнутой подгруппой Ли H. Локально однородное риманово аналитическое многообразие определяется алгеброй $\mathfrak{g}$ Ли векторных полей Киллинга и её стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли всех векторных полей Киллинга локально заданной римановой аналитической метрики, то эта метрика аналитически продолжается до метрики однородного пространства тогда и только тогда, когда H замкнута в G.

Строение незамкнутых подгрупп хорошо известно. Однако, соответствующие исследования носят число алгебраический характер и никак не учитывают локальные свойства римановой метрики. Описание свойств незамкнутой подгруппы $H\subset G$ содержится в классической работе А. И. Мальцева [1]. Если подгруппа Ли H односвязной группы Ли G не замкнута в G, то группа G содержит тор T такой что пересечение $H\cap T$ является всюду плотной обмоткой этого тора. Однако этот факт трудно установить исходя из локальных свойств заданной римановой аналитической метрики, то есть исходя из свойств алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$. Можно ли найти свойства алгебры Ли всех векторных полей Киллинга, при выполнении которых подгруппа H, определяемая стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, будет замкнутой в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. В этом направлении отметим результат Мостова, согласно которому H замкнута в G, если $\mathfrak{h}$ полупроста. Кроме того, Мостов доказал, что H замкнута в G если $dim\mathfrak{g}-dim\mathfrak{h}<5$, [2].

Можно ли найти необходимые и достаточные свойства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многобразии M и её стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$, при выполнении которых H замкнута в G. Чисто алгебраических средств здесь недостаточно. Для исследования проблемы замкнутости стационарной подгруппы H в односвязной группе G привлекается изучение аналитического продолжения локально заданной римановой аналитической метрики. Многообразия, являющиеся аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрики, имеет одну и ту же алгебру Ли всех векторных полей Киллинга. Поэтому вопрос замкнутости группы H в G эквивалентен вопросу об аналитической продолжаемости данной локально заданной римановой аналитической метрики на локально однородном пространстве до метрики полного многообразия. Понятие аналитического продолжения римановой аналитической метрики присутствовало в классических монографиях Хелгасона [3] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [4], но развития не получило.

В работах [5], [6], [7], [8], [9], [10] изучается, причём не только для римановых многообразий, но также для псевдоримановых пространств и пространств аффинной связности, случай, когда $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр. Доказывается, что в этом случае подгруппа H, определяемая стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, будет замкнутой в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. Помимо алгебраического подхода, развивается аналитический подход для изучения аналитического продолжения римановых аналитических многобразий. Основной темой данной работы является исследование локально однородных многообразий, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга которых имеет нетривиальный центр $\mathfrak{z}$. Выводятся свойства алгебры $\mathfrak{g}$, ее стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$ и центра $\mathfrak{z}$, обеспечивающего замкнутость подгруппы H, определяемой стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$, в односвязной группе G, порождённой алгеброй $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{z}$ – центр алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ – ее радикал, а $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$ – ее коммутант. Если $\mathfrak{h}\cap(\mathfrak{z}+[\mathfrak{g};\mathfrak{g}])=\mathfrak{h}\cap[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$, то H замкнута в G. Если для любой полупростой подалгебры $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p}+\mathfrak{r}=\mathfrak{g}$ имеет место равенство $(\mathfrak{p}+\mathfrak{z})\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$, то H замкнута в G.

2. Аналитическое продолжение римановых многобразий. Рассмотрим риманово аналитическое многобразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многобразие N такое что существует аналитическая изометрия $\varphi: U \to N$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многобразия, введённого ещё в классических монографиях Хелгасона [3] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [4]. Однако непродолжаемые многобразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости с выколотыми точками $\left(\frac{1}{n}; \frac{k}{n}\right)$, $k, n \in \mathbb{N}$.

В исследованиях по геометрии римановых пространств в целом, как правило, существенным требованием является полнота рассматриваемого многообразия. Для полного односвязного риманова аналитического многообразия любая изометрия $\varphi: U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M, V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi: M \to M$ [3].

Однако, в общем случае шар U риманова аналитического многобразия нельзя изометрически вложить в полное риманово аналитическое многобразие, т. е., вообще говоря, локально заданная риманова метрика аналитически не продолжается до метрики полного риманова многобразия. Возникает вопрос об обобщении понятия полноты. Естественным обобщением такого рода является непродолжаемость риманова аналитического многобразия. Однако, непродолжаемые многобразия могут быть весьма неестественными.

Зададимся вопросом, можно ли по заданным локальным свойствам римановой аналитической метрики, т. е. метрики, заданной на малом шаре U, построить риманово аналитическое многобразие M, содержащее U в качестве открытого подмножества, и допускающего аналитическое продолжение локальных изометрий до изометрий всего многобразия. Т. е. любая изометрия $\varphi: U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi: M \to M$. Непреодолимым препятствием для такого продолжения является следующий факт. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многобразии M и $\mathfrak{h}_p \subset \mathfrak{g}$ — её стационарная подалгебра, для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h}_p \Leftrightarrow X(p) = 0$. Пусть G — односвязная подгруппа, порождённая алгеброй G, и H — её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G действует на односвязном многобразии M, тогда орбита фиксированной точки $p \in M$ является подмногообразием изометричным фактор группе G/H. Но фактор группа G/H является многообразием лишь в случае замкнутости подгруппы H в G, а это выполняется не всегда.

Перейдём к точным определениям и формулировкам.

Определение 1. Векторное поле $X = \xi^i(x)$ *на римановом многообразии* M *называется* <u>*инфинитеземальной изометрией*</u> *или* <u>*векторным полем Киллинга*</u>, *если производная Ли метрического тензора* g_{ij} *равна 0*, $\mathcal{L}_X g = 0$. *В локальных координатах* $\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} = 0$.

Определение 2. <u>*Локальной изометрией*</u> *между двумя римановыми аналитическими многобразиями* M *и* N *называется изометрия* $\varphi: U \to V$ *между открытыми подмножествами* $U \subset M$, $V \subset N$. *Многобразия между которыми существует локальная изометрия назовём локально изометричными.*

Любое векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на многобразии M, и, тем самым, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга на любом односвязном многобразии N локально изометричном M. Этот факт верен также для многобразий аффинной связности.

Лемма 1. Пусть M — *аналитическое многобразие аффинной связности,* X — *инфинитеземальное аффинное преобразование, заданное в области* $U \subset M$, *и пусть* $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, *такая непрерывная кривая в* M *такая, что* $\gamma(0) \in U$. *Тогда векторное поле* X *аналитически продолжаемо вдоль* γ. *Если кривые* $\gamma(t)$ *и* $\delta(t)$, $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) = \delta(0)$, $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$, *гомотопны, то продолжения векторных полей в точку* x_1 *вдоль этих кривых совпадают.*

Доказательство. Предположим, что X аналитически продолжаемо в окрестность любой точки $\gamma(t)$ при $0 \le t < t_1$. Докажем, что X продолжается и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Пусть V — нормальная окрестность точки q, являющаяся нормальной окрестностью каждой из своих точек ([1]). Рассмотрим $t \le t_1$ такое, что $p = \gamma(t) \in V$.

Векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу изометрий φ_s в окрестности каждой точки $\gamma(t)$, $t < t_1$. Докажем, что для всех достаточно малых значений s локальные изометрии φ_s аналитически продолжаются и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Тогда векторное поле скоростей этой локальной группы изометрий и будет аналитическим продолжением векторного поля X в окрестность точки q.

Рассмотрим связное открытое множество V_0, содержащее точки p и q, замыкание которого также принадлежит V, $\overline{V}_0 \subset V$, $p, q \in V_0$. Рассмотрим малую окрестность $V' \subset V_0$ точки q и соединим точку p отрезком геодезической $\alpha(t)$, $0 \le t \le 1$, с произвольной точкой $q' \in V'$. Пусть $Y = \frac{d\alpha}{dt}(0) \in T_pM$ и $p_s = \varphi_s(p)$, $Y_s = \varphi_s(Y)$. Из точки p_s проведём геодезическую $\beta(t)$, $0 \le t \le 1$, такую, что $\frac{d\beta}{dt}(0) = Y_s$. При достаточно малых значениях s $\beta(t) \in V_0$, $0 \le t \le 1$. Положим $\varphi_s(q') = \beta(1)$. Полученное таким образом отображение и есть аналитическое продолжение изометрии φ_s.

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики не допускающих никаких движений (полей Киллинга). В этом случае удаётся определить, так называемое, квазиполное многобразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики, [11].

Определение 3. Риманово аналитическое многобразие называется *вполне неоднородным многобразием*, если на нём не существует векторных полей Киллинга. Риманову метрику вполне неоднородного многобразия назовём *вполне неоднородной метрикой.*

По лемме 1 все многобразия локально изометричные вполне неоднородному многобразию являются вполне неоднородными.

Определение 4. Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие называется *квазиполным*, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя.

Приведём основные свойства вполне неоднородных и квазиполных многообразий, [11]. Для произвольного вполне неоднородного многообразия M рассмотрим множество $S \subset M$ всех неподвижных точек всевозможных сохраняющих ориентацию локальных изометрий многобразия M в себя.

Теорема 1. Для произвольного вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' множество $S \subset M'$ является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2. Следовательно, $M' \setminus S$ является связным многообразием.

Теорема 2. Для любого вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' существует локально изометричное ему квазиполное многобразие M и локально изометричекое накрывающее отображение $f: M' \setminus S \longrightarrow M$. Таким образом, квазиполное многообразие обладает свойством единственности для каждой вполне неоднородной локально заданной римановой аналитической метрики.

Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [12].

Определение 5. Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется *квазиполным*, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.

Определение 6. Риманово аналитическое многообразие *M* называется локально однородным, если в любой точке $p \in M$ векторные поля Киллинга образуют базис касательного пространства T_pM.

Эквивалентное определение локально однородного многообразия *M* состоит в том, что любых точек $p, q \in M$ существует локальная изометрия φ многообразия M такая, что $\varphi(p) = q$.

Исследуем ориентированные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которых не имеет центра с целью доказать, что каждое такое многобразие локально изометрично квазиполному многообразию, а локально однородное квазиполное многообразие является полным однородным многообразием.

Обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу всех сохраняющих ориентацию локальных изометрий риманова аналитического многобразия $M, \varphi \in Z(M) \Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{g}\ \varphi(X) = X$.

Лемма 2. Пусть M — риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда множество $S \subset M$, состоящее из неподвижных точек всевозможных изометрий $\varphi \in Z(M)$, является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2

Доказательство. Докажем, что для любого открытого множества $U \subset M$ с компактным замыканием имеется только конечное число локальных изометрий из U в себя, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. Предположим противное и рассмотрим бесконечную последовательность локальных изометрий $\varphi_i \in Z(M)$, область определения и множество значений которых лежат в U. При доказательстве леммы 3 работы [11] по бесконечной последовательности локальных изометрий φ_i на некотором открытом множестве $V \subset U$ было построено векторное поле Киллинга X, которое при переходе к подпоследовательности удовлетворяет следующему условию. $\forall t, |t| \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}, \exists k(i) \in \mathbb{N}$ так, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i^{k(i)} = ExptX$, где $ExptX$ — локальная однопараметрическая группа изометрий, порожденная векторным полем X. Следовательно для любого векторного поля Y на V $\exists i \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство

$$|(ExptX)_*Y - Y| \leq \left|\varphi_{i*}^{k(i)}Y - Y\right| + \left|(ExptX)_*Y - \varphi_{i*}^{k(i)}Y\right| \leq 0 + +\left|Y - \left(Exp(-tX)\right)\varphi_{i*}^{k(i)}Y\right| \leq \frac{1}{2}|(ExptX)_*Y - Y|.$$

Следовательно, $\forall Y \in \mathfrak{g}\ (ExptX)_*Y = Y$, т.е. $[X, Y] = 0$. Но это противоречит отсутствию центра в алгебре $\mathfrak{g}$.

Полученное противоречие доказывает существование только конечного числа локальных изометрий из U в U, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. А отсюда, как было показано в [11], уже легко следует тот факт, что множество S является аналитическим подмножеством коразмерности не меньшей, чем 2.

В силу леммы 2 многообразие $M \setminus S$ связно.

Лемма 3. Пусть M — риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда существует локально изометрическое накрывающее отображение из $M \setminus S$ в риманово аналитическое многобразие M_1, также удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и псевдогруппа $Z(M_1)$ которого состоит только из тождественного преобразования.

Доказательство. Профакторизуем многобразие $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Из доказательства леммы 2 следует, что для каждой точки $x \in M \setminus S$ существует окрестность $U_{1x} \subset M \setminus S$ точки x, которая не допускает нетождественных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя, принадлежащим псевдогруппе $Z(M)$. Это доказывает, что фактор отображение π, проектирующее многообразие $M \setminus S$ во множество $M_1 = M \setminus S/Z(M)$ является накрывающим отображением. Значит, для каждой точки $x \in M$ существует такая ее окрестность $U_x \subset M_1$ и такое открытое множество $V_x \subset \pi^{-1}(U_x)$, что отображение π устанавливает гомеоморфизм между множествами V_x и U_x. Определим риманово скалярное произведение. Сузив, если необходимо, множество $V_x \subset M \setminus S$, будем считать, что V_x является координатной окрестностью точки $y \in \pi^{-1}(U_x) \subset M \setminus S$. Тогда объявим множество $U_x \subset M_1$ координатной окрестностью точки $x \in M_1$. Рассмотрим две такие окрестности $U_1, U_2 \subset M_1$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Заметим, что соответствующие множествам U_1, U_2 множества $V_1, V_2 \subset M \setminus S$ могут и не пересекаться. Положим $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_1 = V_{10}, \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_2 = V_{20}$. Тогда существует изометрия $\alpha: V_{10} \approx V_{20}$. Пусть ψ_1 и ψ_2 — координатные отображения на V_1 и V_2 соответственно. Тогда $\psi_1\pi^{-1}$ и $\psi_2\pi^{-1}$ будут координатными отображениями на U_1 и U_2.

Рассмотрим произвольную точку $x \in M_1$ и произвольные векторы $X, Y \in T_x M_1$. Рассмотрим какую-нибудь точку $y \in \pi^{-1}(x) \subset M \setminus S$ и векторы $X_1, Y_1 \in T_y M$ такие, что $\pi_* X_1 = X, \pi_* Y_1 = Y$. Определим риманово скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ равным имеющемуся на $T_x M$ риманову скалярному произведению $\langle X_1, Y_1\rangle$. Если взять другую точку $z \in \pi^{-1}(x)$ и векторы $X_2, Y_2 \in T_z M$ такие, что $\pi_* X_2 = X$, $\pi_* Y_2 = Y$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(z) = y, \varphi_* X_2 = X_1, \varphi_* Y_2 = Y_1$. Следовательно, $\langle X_1, Y_1\rangle = \langle X_2, Y_2\rangle$. Это доказывает корректность определения римановой метрики на M_1.

Построенное риманово многообразие M_1 не допускает нетождественных сохраняющих ориентацию локальных изометрий, индуцирующих тождественное преобразование на алгебре векторных полей Киллинга $\mathfrak{g}$. Проекция $\pi: M \setminus S \longrightarrow M_1$ является локально изометрическим накрывающим отображением. Остается доказать свойство однозначного продолжения векторных полей Киллинга на M_1. Рассмотрим векторное поле Киллинга X, заданное на некотором открытом множестве $U \subset M_1$, и такие открытые множества $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset M \setminus S$, что накрывающее отображение π устанавливает изометрию между множествами V_0 и U_0. Тогда векторное поле $\pi_*^{-1}X$ однозначно продолжается с множества $V_0 \subset M$ на все многообразие M и задает векторное поле Y на M. Пусть точки $y, z \in M \setminus S$ таковы, что $\pi(x) = \pi(y)$ и $\pi_* Y(z) = \pi_* \varphi_* Y(y)$. Так как $\pi \cdot \varphi = \pi$ по определению π, то $\pi_* \cdot \varphi_* = \pi_*$ Следовательно, $\pi_* Y(z) = \pi_* \varphi_* Y(y) = \pi_* Y(y)$.Это доказывает, что отображение π однозначно проектирует векторное поле Y, заданное на M, на векторное поле $\pi_* Y$, заданное на многообразии M_1. Полученное векторное поле $\pi_* Y$, и будет аналитическим продолжением векторного поля X на все многообразие M_1.

Теорема 3. Произвольное риманово аналитическое многообразие M, алгебра Ли векторных полей Киллинга не имеет центра локально изометрично квазиполному многообразию.

Доказательство. Рассмотрим произвольное риманово аналитическое многообразие M', алгебра Ли векторных полей Киллинга не имеет центра. Многобразие M_1, построенное при доказательстве леммы 3, не допускает локальных изометрий в себя, сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга. Тогда квазиполным многообразием M будет некоторое максимальное аналитическое продолжение многообразия M_1. Будем считать, что все многообразия, которые мы будем рассматривать при доказательстве теоремы, обладают свойством однозначного аналитического продолжения векторных полей Киллинга, т.е. алгебра Ли всех векторных полей Киллинга одинакова для всех многообразий и равна $\mathfrak{g}$. Если M' удовлетворяет этому свойству, то и многобразие M_1 ему удовлетворяет.

Рассмотрим множество Λ, состоящее из аналитических продолжений M_α многообразия M_1, удовлетворяющих свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающих локальных изометрий тождественных на алгебре всех векторных полей Киллинга. Снабдим многообразие M_1 отмеченной точкой и отмеченным репером в отмеченной точке, а образы этой точки и этого репера отметим в многообразиях $M_\alpha \in \Lambda$. Введем на этом множестве следующее отношение порядка. $M_\alpha \leq M_\beta$, если существует изометрическое вложение $i_{\alpha\beta}: M_\alpha \to M_\beta$, переводящее отмеченную точку в отмеченную и отмеченный репер в отмеченный. В результате Λ становится частично упорядоченным множеством. Рассмотрим произвольное линейно упорядоченное подмножество Δ множества Λ, Построим прямой предел семейства многообразий $M_\alpha \in \Delta$ и отображений $i_{\alpha\beta}$. Получим многообразие M_0, обладающее следующими свойствами. Для любого многобразия $M_\alpha \in \Delta$ существует изометрическое вложение $i_\alpha: M_\alpha \to M_0$, причем $i_\alpha(M_\alpha) \subset i_\beta(M_\beta)$, если $M_\alpha \leq M_\beta$. $M_0 = \bigcup_{M_\alpha \in \Delta}(M_\alpha)$. Докажем, что $M_0 \in \Lambda$. Произвольное векторное поле X на многобразии M_1 при помощи вложений $i_{1\alpha}: M_1 \to M_\alpha$ и $i_\alpha: M_\alpha \to M_0$ переносится на многообразие $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$, причем, $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* X = (i_\beta \cdot i_{1\beta})_* X$ на $i_\alpha(M_\alpha) \cap i_\beta(M_\beta)$, а векторное поле Киллинга $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* X$ однозначно продолжается с подмногообразия $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$ на любое подмногообразие $i_\beta(M_\beta) \subset M_0, M_\beta \geq M_\alpha$, и значит, на все многообразие M_0. Таким образом, векторное поле Киллинга, заданное на произвольно малом открытом множестве $U \subset M_0$ однозначно продолжается до векторного поля Киллинга на M_0.

Рассмотрим теперь локальную изометрию $\varphi \in Z(M_0)$. Пусть точка $x_0 \in M_0$ принадлежит области определения изометрии φ. Тогда точки x_0 и $\varphi(x_0)$ лежат в некотором подмногообразии $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$. Следовательно, $\varphi \in Z(i_\alpha(M_\alpha))$, и поэтому φ является тождественным преобразованием. Значит, псевдогруппа $Z(M_0)$ состоит только из тождественного преобразования. Итак, для произвольного линейно упорядоченного подмножества $\Delta \subset \Lambda$ мы построили верхнюю грань. По лемме Цорна множество Λ имеет максимальный элемент. Мы утверждаем, что многообразие M, являющееся таким максимальным элементом, и будет искомым квазиполным многообразием. Требуется доказать, что M непродолжаемо.

Предположим противное и обозначим через N нетривиальное продолжение многообразия M. Пусть $S \subset N$ так же, как и выше, обозначает множество неподвижных точек всевозможных локальных изометрий из псевдогруппы $Z(N)$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 3 было профакторизовано многообразие $M \setminus S$, профакторизуем многообразие $N \setminus S$. В результате получим многообразие L, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающего локальных изометрий, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Обозначим через i вложение $i: M \to N$. Докажем, что $i(M) \cap S = \emptyset$. Если $x \in i(M)$, то и некоторый нормальный шар B с центром в x принадлежит $i(M)$. Если, кроме того, $x \in S$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = x$. Эта изометрия определяет изометрию шара B в себя, заданную в нормальных координатах линейным отображением – дифференциалом изометрии φ. Но существование такой изометрии противоречит тривиальности псевдогруппы $Z(M)$. Таким образом, i дает вложение $i: M \to N \setminus S$. Сквозное отображение $\pi \cdot i: M \to L$, где $\pi: N \setminus S \to L$ — построенное при доказательстве леммы 3 накрывающее отображение, является также вложением. Так как, если $\pi \cdot$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$i(x) = \pi \cdot i(y)$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(x) = \varphi(y)$, следовательно $x = y$. В силу того, что M — максимальный элемент множества Λ, $\pi \cdot i$ является изометрией, и $N \setminus S$ накрывает M.

Имеем накрывающее отображение $\pi: N \setminus S \to M$ и вложение $i: M \to N \setminus S$, причем $i(M)$ открыто в $N \setminus S$. Пусть имеется последовательность точек $x_n \in i(M)$, сходящаяся к $x \in N \setminus S$. Тогда последовательность $y_n = \pi(x_n)$ также сходится к некоторой точке $y \in M$. Но тогда, так как $x_n = i(y_n)$, то $x = i(y) \in i(M)$. Это доказывает замкнутость $i(M)$ в $N \setminus S$. Итак, $N \setminus S$ несвязно или $N \setminus S = M$, Но несвязность $N \setminus S$ противоречит лемме 2. Поэтому $N \setminus S = M$. Докажем, что $S = \emptyset$. Предположим противное и рассмотрим нормальный шар B с центром в некоторой точке $x \in S \subset N$. Существует изометрия шара B в себя. Эта изометрия не оставляет неподвижными точки из $B \setminus S$ и, поэтому, является нетождественной локальной изометрией из псевдогруппы $Z(N \setminus S)$. Но, так как $N \setminus S = M$, то это противоречит тривиальности псевдо группы $Z(M)$. Это доказывает, $S = \emptyset$, $N = M$ и M непролжаемо.

Теорема 4. Пусть φ — локальная изометрия из псевдополного многообразия M в псевдополное многобразие N. Тогда φ продолжается до изометрии $\varphi: M \approx N$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in M$ и гладкую кривую $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) \in D(\varphi) \subset M$, $\gamma(1) = x$. Докажем, что изометрию φ, заданную в окрестности $U = D(\varphi) \subset M$ точки $x_0 = \gamma(0)$, можно продолжить вдоль кривой γ. Предположим, что такого продолжения не существует. Рассмотрим минимальное число $t_1 \in [0; 1]$ среди чисел t таких, что изометрия φ не продолжается в окрестность точки $\gamma(t)$ вдоль кривой γ. Докажем, тем не менее, что вопреки предположению продолжение φ на некоторую окрестность точки $\gamma(t_1)$ вдоль кривой γ существует.

В силу предположения, сделанного относительно t_1, $\forall t \in [0; t_1)$, изометрия φ определена в некоторой окрестности точки $\gamma(t)$. Так что на N определена кривая $\delta(t) = \varphi\big(\gamma(t)\big)$, $0 \le t \le t_1$. Пусть $x_1 = \gamma(t_1)$ и $\varepsilon > 0$ таково, что окрестность $U_\varepsilon = \{x \in M, \rho(x; x_1) < \varepsilon\}$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек. Так как $\forall y \in N\ \forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \alpha$ такое, что $\forall t', t'' \in [0; t_1)$, при условии $|t_1 - t'| < \alpha, |t_1 - t''| < \alpha$, выполняются неравенства $\big|\rho\big(y; \delta(t')\big) - \rho\big(y; \delta(t'')\big)\big| \le \rho\big(\delta(t'); \delta(t'')\big) \le \int_{t'}^{t''} \sqrt{\langle \delta'(t); \delta'(t) \rangle} dt = \int_{t'}^{t''} \sqrt{\langle \gamma'(t); \gamma'(t) \rangle} dt < \varepsilon_0$. Следовательно, $\forall y \in N$ существует $\lim\limits_{t \to t_1} \rho\big(y; \delta(t)\big) = \rho_1(y)$. Рассмотрим множество $V_\varepsilon = \{y \in N |\ \rho_1(y) < \varepsilon\}$. Существует изометрия $\psi = \varphi^{-1}$ некоторой окрестности $V_D \subset V_\varepsilon$ множества $D = \{y \in N |\ y = \delta(t), t_2 \le t < t_1\}$ на окрестность $U_D \subset U_\varepsilon$ множества $B = \{x \in M |\ x = \gamma(t), t_2 \le t < t_1\}$. Докажем, что ψ можно продолжить до изометрии $\psi: V_\varepsilon \approx U_\varepsilon$. Докажем сначала, что ψ можно продолжить вдоль любой кривой $\nu(s)$, $0 \le s \le 1$ на V_ε, $\nu(0) \in V_D$, $\nu(1) = y$ — произвольная точка на V_ε. Если предположить, что это не так, то существует минимальное число s_1 среди чисел $u \in [0; 1]$, обладающих свойством: ψ не продолжается вдоль кривой $\nu(s)$ в какую-нибудь окрестность точки $\nu(u)$. Пусть $\sigma > 0$ и $s_2 < s_1$ таковы, что что множество $B_\sigma = \big\{y \in N |\ \rho\big(y; \nu(s_2)\big) < \sigma\big\}$ является нормальной окрестностью точки $\nu(s_2)$ и $\rho\big(\nu(s_2); \nu(s_1)\big) < \frac{\sigma}{2}$. Следовательно, $\nu(s_1) \in B_\sigma$. Используя линейность отображения ψ в нормальных координатах, можно продолжить изометрию ψ, определенную на некоторой окрестности точки $\nu(s_2)$, до изометрии ψ, определенной на всем множестве B_σ, являющимся окрестностью точки $\nu(s_1)$. Это опровергает предположение о непродолжаемости ψ вдоль кривой $\nu(s)$.

Докажем теперь, что продолжение изометрии ψ воль всевозможных кривых на V_ε дает однозначное отображение $\psi: V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Предположим противное. Тогда существует замкнутая жорданова кривая $\nu(t)$, $0 \le t \le 1$, $\nu(0) = \nu(1)$, на V_ε такая, что кривая $\beta(t) = \psi\big(\nu(t)\big)$ на U_ε будет незамкнутой, $\beta(0) \ne \beta(1)$. Но так как всевозможные аналитические продолжения изометрии ψ индуцируют одинаковые отображения на алгебре векторных полей Киллинга, то изометрия вида $\psi \cdot \psi^{-1}$, переводящая $\beta(0)$ в $\beta(1)$, принадлежит псевдогруппе $Z(M)$, а это противоречит тому, что M является квазиполным многообразием. Аналогично доказывается, что продолжение локальной изометрии $\varphi = \psi^{-1}$ из U_ε в V_ε задает однозначное отображение на множестве $\varphi(V_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. Итак, имеем изометрическое вложение $\psi: V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Докажем, что оно является сюръективным отображением. Если предположить противное, то склеив многообразия N и U_ε по отображению ψ, получим нетривиальное продолжение многообразия N, что противоречит его непродолжаемости. Следовательно, имеем изометрию $\psi: V_\varepsilon \to U_\varepsilon$. Обратная изометрия $\psi^{-1}: U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ дает продолжение изометрии φ на окрестность U_ε точки $\gamma(t_1)$ воль кривой γ вопреки первоначальному предположению относительно t_1.

Таким образом, мы доказали, что локальная изометрия φ из M в N продолжается в любую точку $x \in M$ вдоль произвольной кривой на M. Точно также, как выше мы доказали, что продолжение изометрии ψ вдоль всевозможных кривых на V_ε дает взаимно однозначное отображение, определенное на всем V_ε, доказывается, что продолжение φ вдоль всевозможных кривых на M дает изометрическое вложение $\varphi: M \to N$.

Следствие 1. Произвольное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра локально изометрично единственному квазиполному многообразию. То есть, локально заданная риманова аналитическая метрика, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, единственным образом продолжается до квазиполного многообразия.

Доказательство. Пусть квазиполное многобразие M локально изометрично многообразию M' и пусть N — другое квазиполное многообразие, локально изометричное многообразию M'. Тогда существует локальная изометрия φ из N в M' и локальная изометрия ψ из M' в M. Суперпозиция изометрий φ и ψ является локально изометрией из N в M. По теореме 4 локальная изометрия $\psi \cdot \varphi$ продолжается до изометрии $M \approx N$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга римановом аналитическом многообразии M', диффеоморфном шару, а $\mathfrak{h}$ — ее стационарная подалгебра. Пусть G — односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ не имеет центра, то H замкнута в G.

Доказательство. Так как M' диффеоморфно шару, его векторные поля Киллинга аналитически продолжаются на нем однозначно. По теореме 3 многообразие M' локально изоморфно квазиполному многообразию M, имеющему ту же самую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга и ту же самую стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$. Для произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$ при всех значениях параметра t меньших некоторого числа δ элементы однопараметрической группы преобразований $ExptX$ являются локальными изометриями многообразия M. По теореме 4 они продолжаются до изометрий всего многообразия M. Но тогда определены изометрии $ExpntX = (ExptX)^n$. Таким образом, группа G действует на M, а H является ее стационарной подгруппой. Это означает, что орбита группы G на M накрывается однородным многообразием G/H. Следовательно, H замкнута в G.

Отметим, что квазиполное многообразие являются наиболее сжатым, то есть универсально притягивающим объектом в категории всех локально изометричных многообразий. Для любого риманова аналитического многообразия M', алгебра векторных полей Киллинга которого не имеет центра, существует локально изометрическое отображение из M' в квазиполное многообразие M, определенное на всем M'.

3. Локально однородные многообразия, алгебра векторных полей Киллинга которых имеет нетривиальный центр. Исследуем случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$ и укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{z}$, обеспечивающие замкнутость подгруппы H в G.

Определим локальную группу локальных изометрий. Рассмотрим произвольное риманово аналитическое многообразие M, алгебру Ли $\mathfrak{g}$, состоящую из векторных полей Киллинга на нем и группу Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Под локальной группой G (chunk of a group) будем подразумевать малую окрестность единицы группы G. Она состоит из локальных изометрий многообразия M. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, как правило, не порождает группы изометрий многообразия M, но порождает псевдогруппу локальных изометрий. Локальную группу будем обозначать той же буквой, что и группу. Орбита локальной группы локальных изометрий многообразия M является локально однородным многообразием N. Заметим также, что локальная группа H, порожденная стационарной подалгеброй $\mathfrak{h}$ образует группу изометрий некоторого шара с центром в отмеченной точке многообразия M.

Изучим сначала некоторые свойства локальной группы локальных изометрий сточки зрения абстрактных групп преобразований. Рассмотрим локальную группу G как подгруппу группы локальных диффеоморфизмов многообразия M с отмеченной точкой, $G \subset DiffM$, Назовем элемент $\tilde{n} \in G \subset DiffM$ умножением справа, если существует такой элемент $n \in G$, что для всех $x \in M$ таких, что $x = g(e)$, $\tilde{n}(x) = gn(e)$. Умножение справа на элемент n определено корректно, если $\forall h \in H\ \exists h_1 \in H$ такой, что любой локальной изометрии $g \in G$ выполняется равенство $ghn = gnh_1$. Другими словами, n принадлежит нормализатору $N(H)$ группы H в G. Обозначим через N локальную группу, состоящую из элементов $n \in G$, умножение справа на которые в группе G порождают локальные изометрии многообразия M, а через $\mathfrak{n}$ — ее алгебру Ли. Тогда $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$. Заметим, что сами умножения справа, то есть элементы $\tilde{n}$, а также элементы центра Z локальной группы G принадлежат N. Обозначим через M_0 орбиту локальной группы N на M. Присоединенное действие элементов $n \in N$, $g \longmapsto n^{=1}gn$, задает локальные изометрии на M_0.

Найдем подгруппу $G_0 \subset G$, состоящую из «умножений слева». Рассмотрим отображение f из группы G, заданной как группа преобразований множества G в себя, определённое по формуле $f(g) = g(e) = ge$, где e — тождественная локальная изометрия. Тогда, так как $\tilde{n}(e) = \tilde{n}e = en = n$, то будем считать, что $f(\tilde{n}) = n$. На множестве $f(G)$ определим умножение $g_1g_2 = g_1(e)g_2(e)$. Так определённое умножение превращает $f(G)$ в подгруппу $G_0 \subset G$. Левые умножения $g \in G_0$ дополняются правыми умножениями $\tilde{n}$, то есть любой элемент $g \subset G \subset DiffG$, $g(x) = gx\ \forall x \in G$, представим в виде $g = g_0\tilde{n}$, $g_0\tilde{n}(x) = g_0xn\ \forall x \in G$. Следовательно, $G = G_0N$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии M. $\mathfrak{h}$ — её стационарная подалгебра, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть G — односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — её подгруппа порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если

$\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$,

то H замкнута в G.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{h}}$ [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overline{h}_t \in \overline{H}$, $\overline{h}_t \notin H$, определяемую векторным полем $\overline{X} \in \overline{\mathfrak{h}}$, $\overline{X} \notin \mathfrak{h}$. Как доказано в [1], существует тор Т в простой компактной подгруппе $P \in G$ такой что, $H \cap T$ является всюду плотной обмоткой тора T. Поэтому можно считать, что $\overline{h}_t \in T \subset P$. Тогда векторное поле Киллинга $\overline{X}$ касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы $\overline{h}_t$ принадлежит алгебре $\mathfrak{t}$ группы Т и, следовательно, $\overline{X} \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли группы P. Существует окрестность единицы U в группе G и шар B_δ радиуса δ с центром в отмеченной точке $p \in M$ такие, что все элементы $g \in U$ группы G определяют локальные изометрии из шара B_δ в шар $B_{2\delta}$ радиуса 2δ с центром в $p \in M$. Так как элементы $\overline{h}_t$ принадлежат замыканию $\overline{H}$ группы H в G, то для каждого малого t внутренний автоморфизм $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ группы G является пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$, $h_n \in H$. Заметим, что любая однопараметрическая подгруппа $h_t \in H$ определяет группу изометрий шара B_δ, так как $h_t = \left(h_{t/n}\right)^n$, а $h_{t/n} \in U$ и, тем самым, определено на всём шаре B_δ и является его изометрией. Поэтому, внутренние автоморфизмы $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$ порождающие те же локальные изометрии, что и умножение на h_n, определяют изометрии шара B_δ. Так как элементы $\overline{h}_t$ принадлежат нормализатору группы H, то внутренние автоморфизмы $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ определяют отображения на шаре B_δ, являющимися пределами изометрий, то они также задают изометрию шара B_δ. Тогда, так как для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \mapsto \overline{h}_t x$, то определена и локальная изометрия $x \mapsto x\overline{h}_t^{-1} = x\overline{h}_{-t}$, и тем самым, локальная однопараметрическая группа изометрий, порождённая умножениями справа на элементы $\overline{h}_t$.

Все умножения справа коммутируют с умножениями слева, то есть с элементами группы G_0, однако, могут не коммутировать друг с другом. Докажем, что локальная изометрия $\bar{h}_t$ со всеми правыми умножениями. Для этого докажем, что действие элемента $\bar{h}_t$ в группе внутренних автоморфизмов группы G, $g \mapsto \bar{h}_t^{-1} g \bar{h}_t$, задает тождественное отображение на M_0. Рассмотрим последовательность $h_n \in H$ сходящуюся к $\bar{h}_t$. Так как H является нормальным делителем в N, то $nh_n = h_n\, nh'_n$, где $h'_n \in H$, то $nH = h_n^{-1} n h_n H$. Следовательно, внутренние автоморфизмы $g \mapsto h_n^{-1} g h_n$ индуцируют тождественное отображение на M_0. Переходя к пределу, получим, что внутренний автоморфизм $g \mapsto \bar{h}_t^{-1} g \bar{h}_t$ индуцируют тождественное отображение на M_0.

Так как векторное поле X, порождающее локальную однопараметрическую группу $\bar{h}_t$, принадлежит компактной подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$, то X принадлежит коммутанту $[\mathfrak{g}; \mathfrak{g}]$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Векторное поле Z касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы z_t умножений справа на $\bar{h}_t$ является векторным полем Киллинга. Докажем, что Z коммутирует со всеми другими векторными полями Киллинга на M, т. е. $Z \in \mathfrak{z}$. Так как $\forall n \in \mathfrak{n}$ элементы $\bar{h}_t n$ и $n\bar{h}_t$ индуцируют одну и ту же локальную изометрию на M_0, то $\bar{h}_t$ индуцируют тождественное отображение на алгебре $\mathfrak{n}$. Следовательно, векторное поле Киллинга Z (так же как и X) принадлежит центру алгебры $\mathfrak{n}$. Для любых элементов $g_0 \in G_0$ и $\tilde{n} \in \tilde{\mathfrak{n}}$, рассматриваемых как автоморфизмы группы G, выполняются следующие равенства. $g_0\tilde{n}(x) = g_0(xn) = g_0 x n$, $\tilde{n} g_0(x) = (g_0 x)n = g_0 x n$. Это означает, что алгебры $\tilde{\mathfrak{n}}$ и $\mathfrak{g}_0$ коммутируют друг с другом. Следовательно, векторное поле Z коммутирует с алгеброй $\mathfrak{g}_0$ и с алгеброй $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$, т. е. $Z \in \mathfrak{z}$.

Так как $z_t \bar{h}_t^{-1} H = \bar{h}_t^{-1} H \bar{h}_t$, то $exp(tZ)exp(-t\bar{X}) = z_t \bar{h}_t^{-1} \in H$. Следовательно, векторное поле $Z - \bar{X} \in \mathfrak{h}$. Кроме того, $\bar{X} \subset \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Можно доказать, что $Z \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Тогда $Z - \bar{X} \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. С другой стороны, так как $Z - \bar{X} \in \mathfrak{h}$, а $Z - \bar{X} \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $Z - \bar{X} \in \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$, а $\bar{X} \notin \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. То есть векторное поле $Z - \bar{X}$ является стационарным, но не принадлежит центру. Следовательно $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \neq \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Это доказывает теорему от противного.

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на локально однородном римановом аналитическом многообразии M. $\mathfrak{h}$ — её стационарная подалгебра, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ — её радикал. Пусть G — односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — её подгруппа порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Тогда, если для любой полупростой алгебры $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ имеет место равенство

$(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$,

то H замкнута в G.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим замыкание $\bar{H}$ группы H в G. Также как и при доказательстве теоремы 5 рассмотрим однопараметрическую подгруппу z_t, порождённую умножением справа на элементы однопараметрической группы локальных изометрий $\bar{h}_t$ в группе G. Пусть $\bar{X}$ — векторное поле Киллинга касательных векторов к орбитам локальной однопараметрической группы локальных изометрий $\bar{h}_t^{-1}$, а Z — векторное поле Киллинга локальной однопараметрической группы локальных изометрий z_t.

Пусть $\mathfrak{p}$ — полупростая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая векторное поле $\bar{X}$, $\bar{X} \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Докажем, что $Z + \bar{X} \in \mathfrak{h}$ и $Z + \bar{X} \notin \mathfrak{p}$. В односвязной группе Ли G рассмотрим радикал R (подгруппу, соответствующую подалгебре $\mathfrak{r}$) и полупростую подгруппу P, соответствующую подалгебре $\mathfrak{p}$. Тогда R — нормальный делитель группы G, $\mathfrak{r}$ — нормальный делитель алгебры $\mathfrak{g}$, $R \cap P = e$, $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{p} = 0$ и имеет место разложение Леви-Мальцева $G = RP$.

Группа G содержит открытую окрестность единицы (chunk of a group), действующую как локальная группа локальных изометрий в окрестности отмеченной точки $p \in M$. Так как z_t принадлежит центру группы G, то $z_t \in R$, и так как подгруппа H является нормальным делителем группы $\bar{H}$, [1], то $\bar{h}_t^{-1} z_t H = \bar{h}_t^{-1} H \bar{h}_t = H$. Следовательно, локальные изометрии $\bar{h}_t^{-1} z_t$ оставляют точку p неподвижной и, поэтому, принадлежат стационарной подгруппе H. Но, так как $\bar{X} \in \mathfrak{p}$, а $Z \notin \mathfrak{p}$, то $(Z + \bar{X}) \notin \mathfrak{p}$. А так как $(Z + \bar{X}) \in \mathfrak{h}$, то доказанное означает, что для выбранной максимальной полупростой алгебры $\mathfrak{p}$ справедливо утверждение $(\mathfrak{p} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{h} \neq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$. Что и доказывает теорему от противного.

В заключение следует заметить, что изложенные результаты могут быть обобщены на другие объекты редуктивной геометрии, прежде всего на псевдоримановы пространства и пространства аффинной связности.

Также заслуживает внимания изучение аналитического продолжения произвольных римановых аналитических многообразий.

Литература:

1. Мальцев А.И. On the theory of Lie groups in the large // Матем. сб., 1945, т. 16(38), с. 163 — 190.
2. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — Мир. Москва. 1964.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
4. Mostow G. D. Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces. — Ann. Math., 1950, v. 52, p. 606 — 636.
5. Попов В.А. Аналитическое продолжение локально заданных изометрий псевдориманова многообразия. — Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Итоги науки • Юг России. ЮМИ. Том 9. 2015. с. 193 — 200.
6. Popov V.A. On the Extendability of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds. — Journal of Mathematical sciences. Vol. 217, №5, September, 2016, p. 624 — 627.

7. Попов В.А. Аналитическое продолжение локально заданных изометрий псевдориманова многообразия. – Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениями и математическому моделированию. Итоги науки • Юг России. ЮМИ. Том 9. 2015. с. 193 – 200.

8. Попов В.А. Инфинитеземальные аффинные преобразования и их аналитическое продолжение. – Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениями и математическому моделированию. Итоги науки • Юг России. ЮМИ. Том 10. 2016. с. 195 – 201.

9. Popov V.A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups. – Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 38, №4, 2017, p. 724 – 729.

10. Попов В.А. Алгебра Ли векторных полей Киллинга и её стационарная подалгебра. – Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениями и математическому моделированию. Итоги науки • Юг России. ЮМИ. Том 11. 2017.

11. Попов В.А. Аналитическое продолжение локально заданных римановых многообразий. – Матем. Зам., 1984, т. 36, вып. 4, с. 559 – 570.

12. Попов В.А. Продолжаемость локальных групп изометрий // Матем. сб. 1988. Т.135 (177). №1. С.45 – 64.