ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

# О максимально возможном числе кварков в шестимерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры (+ + + − −−)

Попов Н. Н., Кошелев А.А.
Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына ФИЦ Информатика и управление»,
РАН, Москва, РФ

***Аннотация.*** *В работе постулируется, что реальное физическое пространство- время в микромире представляет собой шестимерное псевдоевклидово пространство R3,3 сигнатуры (+ + + − − −). Показывается, что в таком пространстве может существовать не более 12 гиперболических унитарных групп симметрий, являющихся группами движений метрики пространства R3,3 и индуцирующих законы сохранения ароматов кварков.*

***Ключевые слова:*** *шестимерное псевдоевклидово пространство, гиперболические комплексные числа, гиперболические унитарные группы, ароматы кварков.*

## Введение

В основном благодаря работам [1, 2] и [3], был разработан математический формализм исследования свойств элементарных частиц - адронов - алгебраическими методами с использованием унитарных групп симметрий. Так, например, наинизшее представление группы $SU(3)$ предсказывало существование трех частиц-кварков с экзотическими квантовыми характеристиками. Идея реального существования таких частиц или, как принято говорить сейчас, одной частицы, находящейся в различных состояниях, называемых ароматами, оказалась очень плодотворной в моделях представления адронов в виде различных комбинаций кварков. Позднее были открыты дополнительно ещё три кварка, квантовые характеристики которых также были предсказаны теоретически и подтверждены экспериментально. При этом возникает закономерный вопрос о том, сколько в реальном мире может существовать кварков. Предполагается, что n кварков или, что то же самое, ароматов, должны описываться группой $SU(n)$, что само по себе представляется довольно спорным утверждением и никоим образом не приближает нас к разрешению поставленной выше задачи. В работах [4, 5] был намечен подход к исследованию квантовых характеристик элементарных частиц с использованием групп движений метрики шестимерного псевдоевклидова пространства сигнатуры (+ + + − − −). Была выдвинута гипотеза о реальности такого пространства в микромире и было отмечено, что для исследования таких квантовых характеристик кварков, как цвет и аромат, могут быть использованы унитарные группы гиперболического типа, которые позволяют, в принципе, решить задачу о максимальном количестве кварков, существующих в шестимерном псевдоевклидовом пространстве. Именно на более детальной проработке этих вопросов будет сосредоточено наше внимание в предлагаемой работе.

## 1 Гиперболические комплексные числа и гиперболические группы унитарной симметрии

Наш анализ будет в основном опираться на использование понятия гиперболических комплексных чисел и гиперболических унитарных групп для исследования свойств многомерных псевдоевклидовых пространств, представляющих собой пространства гиперболического типа. Определим алгебру гиперболических комплексных чисел $H$ как 2-мерный R-модуль с парой образующих {1, j} и таблицей умножения

$$\left|\begin{array}{c|c|c} & 1 & \mathrm{j} \\ 1 & 1 & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & 1 \end{array}\right|. \tag{1}$$

Элемент $h \in H$ будем записывать в виде $h = 1x + jt$, где $x,\ t \in R$, $R$ - действительная ось вещественных чисел $(-\infty, \infty)$, а $j$ – гиперболическая мнимая единица в $H$. Согласно таблице (1), $j^2 = 1$. Вещественное число $Re\ h = x$ называется вещественной частью гиперболического комплексного числа $h$, а вещественное число $Im\ h = t$ называется мнимой частью числа $h$. В алгебре $H$ определена инволютивная операция комплексного сопряжения: $h = x + jt \Rightarrow \bar{h} = x - jt$. В $H$ можно определить скалярное произведение $<,>$ для любых $h, g \in H$ $<h, g>= h\,\bar{g}$. Псевдонорма и модуль элемента $h \in H$ определяются, соответственно, формулами

$$||h||^2 = h\bar{h},\ \ |h| = \sqrt{||h||^2}.$$

Псевдонорма и модуль не удовлетворяют евклидову свойству нормы:

$|h| = 0 \Rightarrow h \equiv 0$. Алгебра гиперболических комплексных чисел с операцией скалярного произведения индуцирует на плоскости $\{x, t\}$ двумерную псевдоевклидову геометрию с метрикой

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Т. е.

$$< h, h >= (x, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = x^2 - t^2. \tag{3}$$

Линейные преобразования элементов $h \in H$, оставляющие инвариантным скалярное произведение (3), индуцируют однопараметрическую гиперболическую группу унитарных операторов $Uh(1)$. Произвольный элемент $U \in Uh(1)$ можно представить в виде $U = \exp^{j\theta}$, где $\exp^{j\theta} = \cosh\vartheta + j\sinh\vartheta$. Обратным элементом к $U$

является элемент $U^{-1} = \exp^{-j\theta} = \cosh\vartheta - j\sinh\vartheta$, так как $U\,U^{-1} = \cosh^2\vartheta - \sinh^2\vartheta = 1$. Группа $Uh(1)$ есть ни что иное как группа собственных преобразований Лоренца в двумерном псевдоевклидовом подпространстве $R_{1,1}$ с метрикой (2). Действительно, если $h = x + jt$, $U = \cosh\vartheta + j\sinh\vartheta$, то компоненты элемента

$h' = Uh$ определяются как

$x' = x\sinh\vartheta + t\cosh\vartheta,$

$$t' = t\cosh\vartheta + x\sinh\vartheta. \quad (4)$$

Преобразование (4) есть преобразование Лоренца.

Рассмотрим n-мерное пространство гиперболических комплексных чисел $H^n$. В пространстве $H^n$ введем скалярное произведение векторов $<,>$. Если $h = (h^1, \dots, h^n)$ и $g = (g^1, \dots, g^n) \in H$, то скалярное произведение задается билинейной формой

$$< h, g >= h^1\overline{g^1} + \cdots + h^n\overline{g^n} \quad (5)$$

Билинейная форма (5) не является положительно определенной. В случае пространства $H^3$ имеем

$$< h, h >= h^1\overline{h^1} + h^2\overline{h^2} + h^3\overline{h^3}. \quad (6)$$

Учитывая, что $h^k = x^k + jt^k$, $k = 1, 2, 3$, из (6), согласно таблице (1), получаем

$$< h, h >= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (t^1)^2 - (t^2)^2 - (t^3)^2. \quad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что псевдонорма гиперболического комплексного вектора из $H^3$ задает квадратичную билинейную форму, а следовательно, и псевдоевклидову метрику, в пространстве $R_{3,3}$. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых групп симметрий квадратичной билинейной формы (7).

## 2 Гиперболические группы унитарной симметрии в $H^3$ и их связь с сохраняющимися квантовыми характеристиками кварков

Метрика шестимерного псевдоевклидова пространства $R_{3,3}$ инвариантна относительно ряда групп симметрий, возникающих в результате представления псевдоевклидовой метрики с помощью гиперболических комплексных чисел в гиперболическом пространстве $H^3$, согласно формулам (6), (7). Рассмотрим унитарную гиперболическую группу $UH^3(1)$, действующую в пространстве $H^3$. Это трехпараметрическая группа Н-унитарных матриц вида

$$U = \begin{pmatrix} e^{j\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\theta_3} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

оставляющих инвариантной билинейную форму (6).

Эрмитово сопряженная матрица

$$U^+ = \begin{pmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j\theta_3} \end{pmatrix}$$

является обратной к $U$ и $U\,U^+ = 1$. Алгебра Ли этой группы коммутативна и ее базис задается операторами

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Генераторы $\frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial\theta_k}$, $k = 1, 2, 3$, этой группы индуцируют три закона сохранения. Эти законы сохранения связаны с тремя цветовыми квантовыми характеристиками кварков. Следует отметить, что в настоящее время такая квантовая характеристика кварков, как цвет, связывается с абстрактной унитарной группой $SU(3)$. С группой $SU(3)$ связывается другая квантовая характеристика кварков – ароматы трех кварков $u, d, s$. Такая схема описания квантовых характеристик кварков представляется довольно поверхностной и искусственной, не отображающей истинной причины существования этих характеристик. В предлагаемом подходе возникновение сохраняющихся квантовых характеристик кварков таких, как цвет и аромат, непосредственно связывается с геометрической структурой пространства-времени в микромире, а именно, с гиперболическими группами унитарной симметрии пространства. Отметим также, что унитарные группы симметрий гиперболического типа не являются компактными и их использование в ограниченных областях реального пространства-времени может приводить к нарушению законов сохранения квантовых характеристик кварков, что и наблюдается в реальных экспериментах. Рассмотрим теперь гиперболическую группу унитарных матриц $SUh(2)$, действующую в трехмерном гиперболическом пространстве $H^3$. Группа $SUh(2)$ – группа гиперболических унитарных унимодулярных матриц $U$ размерности $2 \otimes 2$, удовлетворяющих условиям $U\,U^+ = 1$, $|det\,U| = 1$. Такая матрица может быть представлена в виде $U = e^{j\sigma_k a_k}$, $U^+ = e^{-j\sigma_k a_k}$, где $\sigma_k$, k=1, 2, 3, – эрмитовы бесследовые матрицы $\sigma^+_k = \sigma_k$, имеющие вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$a_k$, $k = 1, 2, 3$, – произвольные вещественные числа.

Матрицы (9) образуют трехмерный базис в алгебре Ли группы $SUh(2)$ и отличаются от матриц Паули лишь заменой мнимой единицы i на гиперболическую мнимую единицу j. Базисные генераторы (9) алгебры Ли группы $SUh(2)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$[\sigma_k, \sigma_l] = 2j\kappa_{klm}\sigma_m$,

где $\kappa_{klm}$ – тензор третьего ранга, принимающий значения $\kappa_{123} = 1$, $\kappa_{132} = 1$, $\kappa_{231} = 1$, $\kappa_{213} = -1$, $\kappa_{312} = -1$, $\kappa_{321} = -1$.

Структурные константы алгебры Ли группы $SUh(2)$ совпадают со структурными константами алгебры Ли группы $SU(2)$ с точностью до знака.

Разобъем компоненты шестимерного вектора $x = (x^1, x^2, x^3, t^1, t^2, t^3) \in R_{3,3}$ на группы, содержащие по три компоненты такие, чтобы среди них не могли встре- чаться все три компоненты одного вида либо $(x^1, x^2, x^3)$, либо $(t^1, t^2, t^3)$. Всего таких троек может быть двенадцать. Каждой из них можно подобрать среди одиннадцати оставшихся сопряженную тройку координат таким образом, чтобы в этих двух тройках не было бы общих элементов. Например, если взять тройку $(x^1, x^3, t^2)$, то сопряженной ей тройкой будет $(x^2, t^1, t^3)$. Итак, имеется всего шесть сопряженных между собой пар троек. Каждой тройке $(x^k, x^l, t^m)$, $k = 1, 2, 3$ сопоставим матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} x^k & x^l - jt^m \\ x^l + jt^m & -x^k \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

а сопряженной тройке $(x^n, t^p, t^q)$, $n, p, q = 1, 2, 3$, причем $n \neq k, l$, $m \neq p, q$, сопоставим матрицу

$$Y^C = \begin{pmatrix} t^p & t^q - jx^n \\ t^q + jx^n & -t^p \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$detY^C - detY = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (t^1)^2 - (t^2)^2 - (t^3)^2. \qquad (12)$$

Для любых гиперболических унитарных матриц $U_1$, $U_2 \in SUh(2)$ независимые унитарные преобразования

$$Y' = U_1^+ Y U_1, Y^{C\prime} = U_2^+ Y^C U_2$$

оставляют инвариантной билинейную квадратичную форму в правой части соотношения (12) в силу равенства

$$detY^{C\prime} - detY' = detY^C - detY.$$

Итак, унитарные преобразования над парами сопряженных матриц $Y$ и $Y^C$ из группы $SUh(2)$ соответствуют псевдоортогональным преобразованиям в пространстве $R_{3,3}$, оставляющим инвариантной псевдоевклидову метрику. Существует всего шесть групп такого вида, причем каждое представление таких групп разлагается в прямую сумму двух неприводимых сопряженных представлений, действующих в трехмерных подпространствах шестимерного пространства-времени. Этим двенадцати представлениям гиперболических унитарных групп симметрий должны соответствовать двенадцать законов сохранения. Забегая вперед, отметим, что сохраняющиеся квантовые характеристики можно интерпретировать как ароматы кварков. То, что двенадцать представлений шести групп разбиваются на пары неприводимых сопряженных представлений, означает, что ароматы кварков появляются парами $(u, d)$, $(s, c)$, $(b, t)$ и т.д. Отметим, что полученный результат опирается на предположение о том, что временное подпространство изотропно, т.е. не существует выделенного направления течения времени. Однако, если это не так, и существует выделенная временная ось, например, $t_1$, то сферическая симметрия во временном подпространстве нарушается, и сохраняется лишь осевая симметрия. Тогда существуют всего три пары сопряженных троек

| | | |
|---|---|---|
| $(t_1, x_1, x_2)$ | $(t_1, x_1, x_3)$ | $(t_1, x_2, x_3)$ |
| $(t_2, t_3, x_3)$ | $(t_2, t_3, x_2)$ | $(t_2, t_3, x_1)$ |

каждой паре троек соответствует пара сопряженных матриц вида (10) и (11), индуцирующих шесть законов сохранения ароматов кварков. Введем оператор

$$F = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим представление группы SUh(2) в шестимерном пространстве. Операторы $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, и F в шестимерном пространстве принимают вид

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}}\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & 0\\ \boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}0&-j\\j&0\end{matrix}}\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}0&-j\\j&0\end{matrix}} & 0\\ \boxed{\begin{matrix}0&-j\\j&0\end{matrix}} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix}} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix}} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix}}\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1&0\\0&1\end{matrix}} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}-1&0\\0&1\end{matrix}} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}-1&0\\0&1\end{matrix}}\end{pmatrix}.$$

Шесть ортонормированных векторов (1, 0,... ,0), (0, 1,... ,0), ... , (0,... ,0,1) описывают шесть ароматов кварков, которые будем обозначать, соответственно, как $d$, $u$, $s$, $c$, $b$, $t$. Представление эрмитова оператора $F$ в шестимерном постранстве задает оператор ароматов шести кварков. Шесть введенных ортонормированных векторов задают собственные векторы оператора $F$. Собственные значения оператора $F$ определяются числами $\pm 1$, причем ароматам $u, c, t$ соответствует собственное значение +1, а ароматам $d, s, b$ соответствует собственное значение −1. Приведенные построения прямо указывают на то, что в шестимерном псевдоевклидовом пространстве $R_{3,3}$ с выделенной временной осью может существовать только шесть сохраняющихся квантовых величин, которые можно интерпретировать как ароматы кварка.

## Заключение

В предлагаемой работе было показано, что такие фундаментальные характеристики кварков, как цвет и аромат, могут быть индуцированы гиперболическими унитарными группами симметрий шестимерного псевдоевклидова пространства $R_{3,3}$. Таким образом устанавливается непосредственная связь между геометрической структурой пространства $R_{3,3}$ и некоторыми сохраняющимися квантовыми характеристиками кварков. На основе анализа свойств гиперболической группы $SUh(2)$ удалось предсказать максимальное количество возможных кварков, которые могут быть реализованы в шестимерном пространстве $R_{3,3}$. Отметим, что, согласно общепринятой концепции, такая квантовая характеристика, как цвет, вводится при помощи группы $SU(3)$, а шесть ароматов описываются группой $SU(6)$. Эти группы никак не связаны с физическим пространством-временем $R_{1,3}$, и их встраивание в конструкцию расслоенного пространства, в котором базой является пространство-время $R_{1,3}$, а слоями являются абстрактные подпространства с группами симметрий типа $SU(n)$, представляется довольно искусственной конструкцией с весьма ограниченными возможностями. Пока преждевременно делать вывод о реальности физического пространства-времени $R_{3,3}$ в микромире, но предсказание существования слабых гиперзаряда и изоспина, полученное в работах [4-5] на основе использования дополнительных групп скрытых симметрий пространства $R_{3,3}$, внушают определенную надежду на то, что в рамках использования различных групп симметрий только пространства-времени $R_{3,3}$ удастся описать все известные квантовые характеристики элементарных частиц, в частности кварков, и построить теорию великого объединения.

## Литература:

1.Gell-Mann M, Phys. Rev., 125, 1060 (1962).

2.Gell-Mann M, Phys. Lett., 8, 214 (1964).

3.Zweig G, CEPN Report N 8182/TH 401 (1964).

4.Попов Н. Н. О корреляции групп симметрии шестимерного псевдоевклидова пространства и квантовых характеристик элементарных частиц. 37-я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения. М., № 3 (37, март 2018).

5.Попов Н. Н., Кошелев А. А. Структура пространства-времени и ее связь со свойствами элементарных частиц. 39-я Международная научная конференция ЕНО, М., №5 (39, май, 2018).