

## Анализ изменения силы тока при инжектировании заряженных частиц в кольцеобразный диэлектрический канал

Полищук Евгений Петрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник  
Институт рентгеновской оптики (г. Москва)

*Проводится теоретический анализ процесса нарастания тока в диэлектрическом кольцевом канале с наэлектризованными стенками при инжектировании в него заряженных частиц. Определены основные факторы, влияющие на протекание этого процесса, и получены соотношения, позволяющие делать количественные оценки.*

В настоящей статье, посвящаемой памяти Мурадина Абубекировича Кумахова (1941 - 2014), проводится теоретическое исследование процесса нарастания тока в диэлектрическом кольцевом канале при инжектировании в него заряженных частиц.

М.А. Кумахову принадлежат крупные научно-технические достижения: открытие излучения каналированных частиц в кристаллах [1], получившего название эффекта Кумахова, и изобретение рентгеновской линзы, которая наряду с целым рядом других приборов для управления рентгеновским, гамма- и иными видами излучения вошла в историю науки и техники под названием оптики Кумахова [2]. На это и другие изобретения М.А.Кумахова выданы более 100 российских и зарубежных патентов. В последние годы М.А.Кумахов занимался проблемами, примыкающими к энергетике. В 2013 - 2014 г.г. были опубликованы статьи [3] и [4], посвященные управлению движением заряженных частиц в изогнутых диэлектрических каналах, в том числе в замкнутом в виде кольца канале, без использования для этого громоздких внешних электромагнитных поворотных и фокусирующих устройств. По тематике этих исследований М.А.Кумахову выданы патенты [5], [6].

В статье [3] сообщается об экспериментах по транспортированию заряженных частиц в кольцевом диэлектрическом канале, стенки которого электризуются самими частицами, инжектируемыми в канал, а в статье [4] содержится теоретическое обоснование возможности такого транспортирования.

При движении частиц по замкнутым круговым траекториям они совершают многократное прохождение по каналу и благодаря этому создают в нем ток, сила которого может достигать весьма высоких значений. В описанных в [3] экспериментах при токе инъекции электронов 0,3 мА была получена сила тока порядка 3 кА.

Представляет интерес получение аналитических зависимостей, описывающих процесс нарастания силы тока  $I(t)$  в диэлектрическом кольцевом канале при инжектировании в него заряженных частиц, что позволило бы установить факторы, влияющие на протекание этого процесса, и произвести количественную оценку этого влияния. Получение таких зависимостей является целью настоящей работы.

Предполагается, что в канал инжектируются заряженные частицы, предварительно ускоренные до некоторой энергии  $\mathcal{E}_0$ . Сила тока инъекции  $I_H$  предполагается постоянной. Множество движущихся в канале частиц образует кольцевой "шнур" тока, который обладает некоторой индуктивностью  $L$ . При нарастании тока и индукции создаваемого им магнитного поля по мере инжектирования частиц в кольцевом канале возникает ЭДС самоиндукции  $E_c$ . Последняя препятствует нарастанию тока и обуславливает уменьшение скорости частиц по сравнению

со скоростью  $V_0$  которую они имели в момент инжектирования. В итоге в текущий момент времени  $t$  в канале находятся частицы, вошедшие в него в разные предшествующие моменты времени  $\theta \leq \theta \leq t$ , испытывавшие разное торможение и поэтому имеющие к моменту  $t$  разные скорости  $V(\theta, t)$ .

Частица, имеющая скорость  $V(\theta, t)$  в единицу времени совершает  $V(\theta, t)/l$  оборотов в кольцевом канале. Здесь  $l$  - длина круговой траектории частицы, далее приближенно считаемая одинаковой для всех частиц и равной длине окружности осевой линии кольца, т.е.  $l = 2\pi R$ , где  $R$  - радиус указанной окружности. Такое предположение допустимо, поскольку внутренний радиус  $r$  поперечного сечения кольцевого канала существенно меньше  $R$  (например, в описанных в [3] экспериментах  $R=140$  мм,  $r=3$  мм), а радиус  $\rho$  упомянутого "шнура" тока, в пределах которого находятся движущиеся по каналу частицы, еще меньше. При  $V(\theta, t)/2\pi R$  оборотов в единицу времени частица, имеющая заряд  $q$ , создает ток  $qV(\theta, t)/2\pi R$ , а так как при токе инъекции, равном  $I_H$ , в единицу времени в канал инжектируется не одна частица, а  $n=I_H/q$  частиц, сила тока, создаваемого в момент  $t$  всеми частицами, вошедшими в канал в момент  $\theta$ , составит

$$I_\theta(t) = nqV(\theta, t)/2\pi R = I_H V(\theta, t)/2\pi R. \quad (1)$$

Суммарная сила тока  $I(t)$  в момент  $t$ , создаваемого всеми частицами, инжектированными в канал за все время с момента начала инжектирования, может быть найдена как интеграл

$$I(t) = \int_{\theta=0}^t I_\theta(t) d\theta = \frac{I_H}{2\pi R} \int_{\theta=0}^t V(\theta, t) d\theta. \quad (2)$$

Напомним, что  $V(\theta, t)$  - скорость в момент  $t$ , частицы, вошедшей в канал в предшествующий момент  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq t$ ) с начальной скоростью  $V_0$  зависящей от энергии  $\mathcal{E}_0$  инжектируемых частиц.

Для нахождения функции  $V(\theta, t)$  используем соотношение для импульса такой частицы, рассматривая ее движение на интервале от момента  $\theta$  до текущего момента  $t$ , т.е.  $t \geq \theta$ , только вдоль траектории по осевой линии кольцевого канала и учитывая только силу  $F(t)$ , действующую на частицу в направлении, совпадающем со скоростью (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. [7, С. 149]):

$$\frac{m_0 V(\theta, t)}{\left[1 - \left(\frac{V(\theta, t)}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{dV(\theta, t)}{dt} = F(t), \quad (3)$$

где  $m_0$  - масса покоя частицы,  $c$  - скорость света.

Как уже было сказано выше, сила, действующая в указанном направлении, обусловлена ЭДС самоиндукции  $E_c$ . Последняя равна

$$E_c = -L \frac{dI(t)}{dt}, \quad (4)$$

где  $L$  - индуктивность упомянутого "шнура" тока, имеющего форму кольца радиуса  $R$  с радиусом поперечного сечения  $\rho$ . ЭДС  $E_c$ , распределенная вдоль окружности кольца длиной  $l=2\pi R$ , действует на частицы посредством порождаемого ею электрического поля, напряженность которого можно определить как

$$E = \frac{E_c}{l} = -\frac{L}{2\pi R} \frac{dI(t)}{dt}. \text{ Поле, имеющее такую напря-$$

женность, действует на частицу с зарядом  $q$  с силой  $F(t)=qE$ . Поэтому в выражении (3) следует положить

$$F(t) = -\frac{qL}{2\pi R} \frac{dI(t)}{dt}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{m_0 V(\theta, t)}{\left[1 - \left(\frac{V(\theta, t)}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{dV(\theta, t)}{dt} = -\frac{qL}{2\pi R} \frac{dI(t)}{dt}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) в пределах от  $\theta$  до  $t$ , получим,

$$\frac{m_0 V(\theta, t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V(\theta, t)}{c}\right)^2}} - \frac{m_0 V_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{c}\right)^2}} = -\frac{qL}{2\pi R} [I(t) - I(\theta)], \quad (6)$$

где  $V_0$  - скорость частицы в момент инжектирования ее в канал, т.е. в момент  $t = \theta$ .

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= X \int_{\theta=0}^t \frac{dU(\theta, t)}{dt} d\theta + XU(t, t) = X \int_{\theta=0}^t \frac{dU(\theta, t)}{dt} d\theta + X \frac{h}{\sqrt{1 + \beta^2 h}} = \quad (14) \\ &= X \int_{\theta=0}^t \frac{dU(\theta, t)}{dt} d\theta + X \end{aligned}$$

(здесь принято во внимание, что  $\frac{h}{\sqrt{1 + \beta^2 h}} = 1$ , см. (8)).

Для  $\frac{dU(\theta, t)}{dt}$  с учетом (12) можно получить:

$$\frac{dU(\theta, t)}{dt} = -\frac{\frac{d\delta(\theta, t)}{dt}}{\left\langle 1 + \beta^2 [h - \delta(\theta, t)]^2 \right\rangle^{3/2}} = -\frac{Y \frac{dI(t)}{dt}}{\left\langle 1 + \beta^2 [h - Y(I(t) - I(\theta))]^2 \right\rangle^{3/2}} \quad (15)$$

и после подстановки в соотношение (14) и разрешения последнего относительно  $\frac{dI(t)}{dt}$  найти:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{X}{1 + XY \int_{\theta=0}^t \frac{d\theta}{\left\langle 1 + \beta^2 [h - Y(I(t) - I(\theta))]^2 \right\rangle^{3/2}}}. \quad (16)$$

В полученное уравнение для искомой силы тока  $I(t)$  входят параметры  $X, Y, \beta$  и  $h$ , определяемые соотношениями (7), (8) и зависящие от "геометрии" кольца (радиус  $R$ ), свойств инжектируемых частиц (масса покоя  $m_0$ , заряд  $q$ ), силы тока инжекции  $I_H$  и скорости  $V_0$  частиц в момент инжектирования. Именно они и являются упомянутыми в начале статьи факторами, определяющим характер протекания процесса.

$$X = I_H V_0 / 2\pi R, \quad Y = \frac{qL}{2\pi R m_0 V_0}, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{V_0}{c}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (8)$$

$$\delta(\theta, t) = Y [I(t) - I(\theta)] \quad (9)$$

и рассматривая (6) как уравнение относительно  $V(\theta, t)$ , найдем

$$V(\theta, t) = \beta c \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - Y [I(t) - I(\theta)]}{\sqrt{1 + \beta^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - Y [I(t) - I(\theta)] \right]^2}} = V_0 \frac{h - \delta(\theta, t)}{\sqrt{1 + \beta^2 [h - \delta(\theta, t)]^2}}. \quad (10)$$

Тогда для силы тока  $I(t)$ , используя выражение (2), будем иметь:

$$I(t) = X \int_{\theta=0}^t \frac{h - \delta(\theta, t)}{\sqrt{1 + \beta^2 [h - \delta(\theta, t)]^2}} d\theta, \quad (11)$$

или, введя обозначение

$$U(\theta, t) = \frac{h - \delta(\theta, t)}{\sqrt{1 + \beta^2 [h - \delta(\theta, t)]^2}}, \quad (12)$$

$$I(t) = X \int_{\theta=0}^t U(\theta, t) d\theta. \quad (13)$$

Для получения дифференциального уравнения продифференцируем обе части равенства (13) по  $t$ , пользуясь правилом дифференцирования по параметру интеграла, у которого верхний предел зависит от этого же параметра:

Индуктивность  $L$  "шнура" тока, от которой зависит параметр  $Y$ , может быть определена по формуле (Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. [8, С. 207]):

$$L = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{\rho} - \frac{7}{4} \right), \quad (17)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная.

Напомним, что  $R$  - радиус осевой линии кольцевого канала,  $\rho$  - радиус поперечного сечения "шнура" тока в коль-

це, который не может быть больше внутреннего радиуса  $r$  поперечного сечения кольца. Ввиду того, что фактическое значение  $\rho$  неизвестно, в качестве  $\rho$  можно принять  $r$ . При этом погрешность расчетов будет обусловлена также тем, что  $\rho$  может быть не постоянным во времени. Влияние неточности знания радиуса  $\rho$  в некоторой степени нивелируется логарифмическим характером зависимости индуктивности  $L$  от этого радиуса.

Из (16) можно видеть, что при  $\beta \rightarrow 0$  (т.е. без учета релятивистских эффектов) уравнение приобретает вид:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{X}{1 + XYt}, \quad (18)$$

и имеет решение:

$$I(t) = \frac{1}{Y} \ln(1 + XYt). \quad (19)$$

Рассмотрим количественный пример для случая, когда инжектируемые заряженные частицы являются электронами, т.е.  $q = e = 1,6 \cdot 10^{19}$  Кл,  $m_0 = m_e = 9,1 \cdot 10^{31}$  кг. Примем, как в [3], что  $R = 14$  см,  $r = 3$  мм, и будем считать, что  $\rho = r$ . Кроме того, примем, как и в [3], что ток инжекции  $I_H = 0,3$  мА при энергии инжектируемых электронов  $\mathcal{E}_0 = 20$  кэВ, чему соответствует скорость  $V_0 = 8,15 \cdot 10^7$  м/с.

При сделанных предположениях индуктивность  $L \approx 7,34 \cdot 10^7$  Гн, параметры  $X$  и  $Y$  имеют значения:  $X = 2,78 \cdot 10^4$  А/с,  $Y = 1,8 \cdot 10^3$  1/А, а коэффициент перед  $t$  в (19) равен  $XY = 50$  1/с. При этом сила тока, найденная по приближенному (соответствующему  $\beta \rightarrow 0$ ) решению (19), равна

$$I(t) = 555 \ln(1 + 50t) [\text{А}], \quad (20)$$

если время  $t$  выражено в секундах.

Аналогично, при энергии инжектируемых электронов  $\mathcal{E}_0 = 100$  кэВ можно получить:

$$X = 5,62 \cdot 10^4 \text{ А/с}, \quad Y = 0,89 \cdot 10^3 \text{ 1/А}, \quad XY = 50 \text{ 1/с}$$

$$I(t) = 1124 \ln(1 + 50t) [\text{А}] \quad (21)$$

Зависимости (20) и (21) графически представлены сплошными кривыми на рис. 1, а) и б) соответственно.

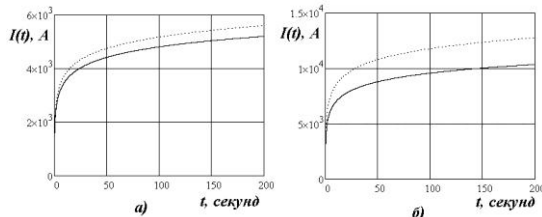


Рис.1. Расчетные зависимости тока в кольцевом канале от времени

Нахождение решения уравнения (16) в общем случае наталкивается на существенные математические трудности, однако всё же необходимо получить представление о характере этого решения. Это объясняется тем, что скорость частиц, вошедших в канал задолго до текущего момента  $t$ , под действием тормозящего ускорения, создаваемого вследствие наличия ЭДС самоиндукции, может изменить свой знак. Как показывает анализ, упрощенные математические соотношения, не учитывающие релятивистские эффекты, даже при небольших значениях  $\beta$ , т.е. при небольших значениях начальной скорости  $V_0$  частиц, соответствующих не очень высоким энергиям  $\mathcal{E}_0$  "допускают" неограниченный рост скорости после изменения ее знака. Очевидно, что это приводит к получению заниженных оценок силы тока.

Для оценки степени такого занижения найдем первое приближение решения уравнения (16) при ненулевом  $\beta$ .

Приближенное уравнение (18) отличается от уравнения (16) тем, что содержащийся в знаменателе (16) интеграл

$$\int_{\theta=0}^t \frac{d\theta}{\left(1 + \beta^2 [h - Y(I(t) - I(\theta))]^2\right)^{3/2}} = J(t), \quad (22)$$

заменен на  $t$ . Оценим сначала отличие  $J(t)$  от  $t$ , для чего рассмотрим "поведение" этого интеграла, подставив в него вместо величины  $\delta(\theta, t) = Y[I(t) - I(\theta)]$  ее приближенное значение, найденное по приближенному решению (19):

$$\delta(\theta, t) \approx \ln \frac{1 + XYt}{1 + XY\theta}. \quad (23)$$

На рис. 2 приведены графики зависимостей интеграла  $J(t)$  рассчитанные с использованием приближенного выражения (23) при помощи программы Mathcad, для значений  $\beta$ , соответствующих энергиям  $\mathcal{E}_0$  равным 20 кэВ и 100 кэВ.

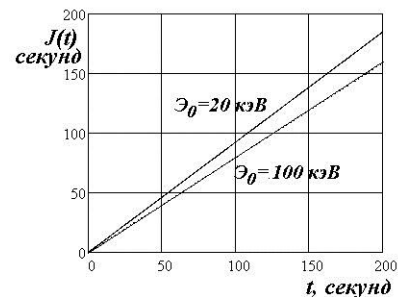


Рис. 2. Приближенные зависимости от времени интеграла  $J(t)$

Оба графика практически линейны. При энергии  $\mathcal{E}_0 = 20$  кэВ  $J(t) \approx 0,92t$ , а при  $\mathcal{E}_0 = 100$  кэВ  $J(t) \approx 0,79t$ . Принимая во внимание, что приближенное уравнение (18) получено из (16) путем замены интеграла  $J(t)$  на  $t$ , первое приближение решения уравнения (16), учитывающее отличие  $\beta$  от нуля, можно получить из (18) и (19) путем умножения  $Y$  на коэффициент, показывающий отличие  $J(t)$  от  $t$ , т.е. для приведенных выше значений энергии  $\mathcal{E}_0$  соответственно, на 0,92 и 0,79:

$$\text{при } \mathcal{E}_0 = 20 \text{ кэВ } I(t) \approx \frac{555}{0,92} \ln(1 + 0,92 \cdot 50t) \quad (24)$$

$$\text{при } \mathcal{E}_0 = 100 \text{ кэВ } I(t) \approx \frac{1124}{0,79} \ln(1 + 0,79 \cdot 50t). \quad (25)$$

Анализ выражений (24) и (25) и сравнение их соответственно с (20) и (21) показывает, что при малых  $t$  вычисленные значения силы тока должны практически совпадать, а при больших  $t$  учет отличия  $\beta$  от нуля должен приводить к увеличению найденных выше значений силы тока. Соответствующие зависимости, рассчитанные по формулам (24) и (25), представлены пунктирными кривыми на рис. 1, а) и б). При энергии  $\mathcal{E}_0 = 100$  кэВ значения силы тока, вычисленные без учета отличия  $\beta$  от нуля, для больших  $t$  примерно на 20% меньше значений, соответствующих найденному первому приближению, учитывающему отличие  $\beta$  от нуля. Скорость нарастания тока в момент начала инжектирования определяется параметром  $X$ , и учет отличия  $\beta$  от нуля влияет лишь постольку, поскольку этот учет влияет на точность пересчета энергии  $\mathcal{E}_0$  частицы в ее скорость  $V_0$  входящую в соотношение (7) для  $X$ . В масштабе графиков рис. 1 такое влияние неразличимо.

Найденные зависимости демонстрируют возможность получения в кольцевом канале весьма больших токов, что позволяет, в частности, рассматривать такой канал как источник магнитного поля (патент [5] М.А.Кумахова) и



средство для аккумуляции энергии (патент [6] М.А.Кумахова). Однако несмотря на большие значения токов, которые могут быть получены в кольцевом канале, при весьма малых токах инжекции, при которых проводились описанные в [3] эксперименты, запасенная в кольце

энергия не может быть большой. Вместе с тем обнадеживают результаты успешных экспериментов по инжектированию в изогнутый диэлектрический канал (хотя и не замкнутый) весьма больших импульсных токов, о чем сообщается в работе Druj O.S. с соавторами [9].

### Литература:

1. Кумахов М.А. Излучение каналированных частиц в кристаллах. Москва: Энергоатомиздат, 1986. -161 с.
2. Application of Kumakhov optics. McGRAW-HILL YEARBOOK of Science & Technology 1993. - P. 487-490.
3. Кумахов М.А., Тегаев Р.И. Эффект многократного бесконтактного поворота заряженных частиц в полном круглом стеклянном кольце. ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2013, том 83, вып. 6. - С. 147-150.
4. Кумахов М.А.. Особенности движения заряженных частиц в полном круге с наэлектризованными стенками. ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2014, том 84, вып. 2. - С. 112-115.
5. Кумахов М.А. Способ изменения направления движения пучка ускоренных заряженных частиц, устройство для осуществления этого способа, источник электромагнитного излучения, линейный и циклический ускорители заряженных частиц, коллайдер и средство для получения магнитного поля, создаваемого током ускоренных заряженных частиц. Патент РФ №2462009, опубл. 20.09.2012, приоритет от 08.06.2011.
6. Кумахов М.А. Способ преобразования и аккумуляции энергии с использованием пучка заряженных частиц и устройство для его осуществления. Патент РФ №2508595, опубл. 27.02.2014, приоритет от 27.07.2012.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Электродинамика. Москва: "Наука", 1969. — 272 с.
8. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Ленинград: Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 1986. — 488 с.
9. Druj O.S., Shchagin A.V., Yegorenkov V.V., Yuferov V.B. Electron beam transport in dielectric tubes. EAST EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS, Vol.1 No. 1, 2014. - P. 70-73.