

## Использование теории производственных функций для анализа экономической деятельности Московского НПЗ

Петров М.М., Колбин В. В, д.ф.-м.н.  
Санкт-Петербургский государственный университет

Для эффективного изучения такой большой и сложной системы, как нефтеперерабатывающий завод используют модельные представления этого объекта. Для экономико-математического моделирования широкое распространение получил метод производственных функций. Как пишет Г. Тинтер [1]: «Функция производства показывает соотношение между использованными количествами производственных факторов и количеством конечного продукта при использованной технике». Обозначив через  $q$  размеры выпуска, производственную функцию можно записать в виде:

$$q = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Она представляет собой отображение любого вектора затрат (точки пространства затрат) в единственное неотрицательное действительное число, а именно максимальный выпуск, который может быть получен при использовании этого вектора затрат. Для изучения экономического аспекта планирования работы НПЗ было решено построить производственную функцию на примере Московского НПЗ.

Определение основных факторов производства

Факторы производства – ключевые показатели, от которых зависит объём выработки продуктов производства. В таблице 1 приведены основные такие факторы с указанием размерности. Приведённые значения показывают значения, исходя из периода работы НПЗ в 1 месяц.

Таблица 1. Основные факторы производства МНПЗ.

Название	Единицы измерения	Среднее значение за период наблюдения
Сырая нефть	млн тонн	0,89
Затраты на энергетику	млн руб	145
Затраты на персонал	млн руб	435
Затраты на амортизацию оборудования и др.	млн руб	1667

Очевидно, что основным фактором производства будет сырая нефть, так как именно она служит исходным компонентом (и объектом) переработки.

Затраты на персонал определены следующим образом: согласно открытым источникам [3] средняя численность сотрудников МНПЗ составляет 2,2 тысячи человек, а средняя заработная плата составляет 103 тыс. рублей. Однако, эта цифра не учитывает дополнительные расходы компании на выплату налогов, оплату соц. льгот и т.д. Согласно оценке декана экономического факультета МГУ А. Аузана [2] средняя заработная плата составляет 52% от всех перечислений работодателя. Таким образом, расходы на фонд заработной платы в месяц составляют 435 млн рублей.

Согласно открытым данным [3], в ремонт и модернизацию МНПЗ группа компаний «Газпром нефть» за период с 2011 по 2018 года вложила 160 млрд рублей. Так как нет более детальных данных, придётся ограничиться следующим расчётом:

$$amortization = \frac{160 \text{ млрд}}{8 \text{ лет} \cdot 12 \text{ мес}} = 1,66 \text{ млрд}$$

где *amortization* – среднемесячные затраты на амортизацию оборудования и вклад и развитие НПЗ. По приведённым факторам была собрана статистика за 2015-2018 гг.

Определение производственной функции

В научных источниках чаще всего используют следующие производственные функции.

### 1. Линейная:

$$q = \sum_{i=1}^N a_i x_i$$

здесь и далее  $q$  – объём производства,  $x_i$  – объём факторов производства,  $a_i$  – параметры.

В данном случае линейная ПФ будет выражаться в следующем виде:

$$q = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

здесь и далее  $x_1, x_2, x_3, x_4$  соответственно объём поставок нефти, затраты на электроэнергию, на фонд оплаты труда и модернизацию.

С помощью метода наименьших квадратов были определены коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , которые составили 99,5, 1,25, 1,005, 0,0088 соответственно.

Абсолютный рассогласования составил 42, среднее относительное отклонение – 7%. График представлен на рисунке 1.

Объём выработки МНПЗ



Рисунок 1. Сравнение рассчитанных объёмов выработки по линейной ПФ с фактическими данными

2. Функция Леонтьева:

$$q = \min\{a_i x_i\}$$

В данном случае линейная ПФ будет выражаться в следующем виде:

$$q = \min(a_1 x_1; a_2 x_2; a_3 x_3; a_4 x_4)$$

С помощью метода наименьших квадратов были определены коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , которые составили 88.55, 6.44, 1.92, 0.0088 соответственно.

Критерий рассогласования составил 152, среднее относительное отклонение – 15%. График представлен на рисунке 2.

Объём выработки МНПЗ

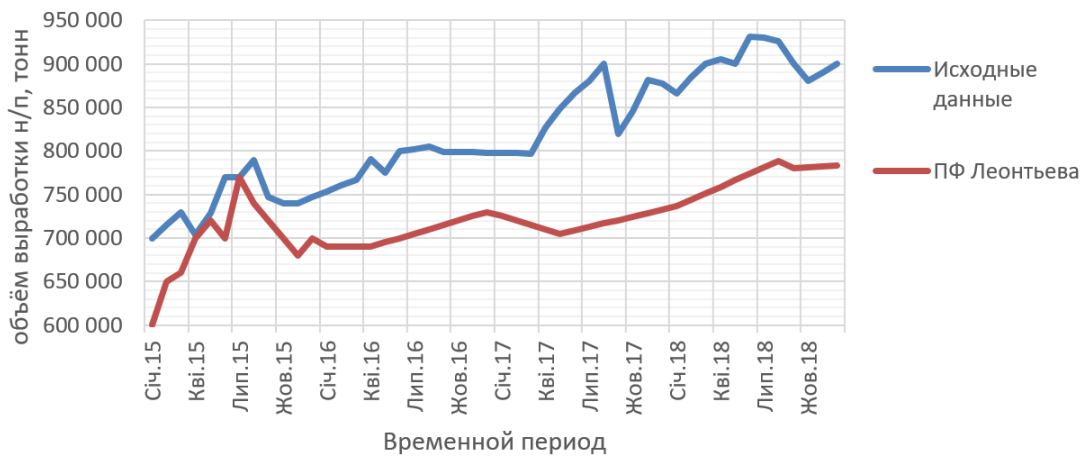


Рисунок 2. Сравнение рассчитанных объёмов выработки по ПФ Леонтьева с фактическими данными.

3. Функция Кобба - Дугласа:

$$q = A \prod_i x_i^{a_i}$$

В данном случае линейная ПФ будет выражаться в следующем виде:

$$q = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4}$$

С помощью встроенного пакета в MS Excel для решения оптимизационных задач «Поиск решения» были определены коэффициенты A,  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , которые составили 550, 0.85, 1.64, 1.06, 1.007, 0.0088 соответственно.

Критерий рассогласования составил 32, среднее относительное отклонение – 4,8%. График представлен на рисунке 3.



Рисунок 3. Сравнение рассчитанных объемов выработки по ПФ Кобба-Дугласа с фактическими данными.

#### 4. Функция CES для 4-х факторов:

$$q = (a_1 x_1^{-\beta_{12}} + (1 - a_1) x_2^{-\beta_{12}})^{\gamma_{12}} \cdot (a_2 x_3^{-\beta_{34}} + (1 - a_2) x_4^{-\beta_{34}})^{\gamma_{34}}$$

С помощью встроенного пакета в MS Excel для решения оптимизационных задач «Поиск решения» были определены коэффициенты  $a_1, a_2, \beta_{12}, \beta_{34}, \gamma_{12}, \gamma_{34}$  которые составили 11.05, 60, -2.15, -4.03, 5.09, 0.1 соответственно.

Критерий рассогласования составил 10. среднее относительное отклонение – 3,6%. График представлен на рисунке 4.



Рисунок 4. Сравнение рассчитанных объемов выработки по ПФ CES с фактическими данными.

Наиболее оптимальной среди всех рассмотренных ПФ оказалась CES для 4-х факторов, которая имеет следующий вид:

$$q = (11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}$$

На основе полученной ПФ вычислим основные характеристики: предельные эффективности ресурсов  $e_i$ , коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам  $\epsilon_i$ , общий коэффициент эластичности выпуска  $E_i$  и показатель отдачи на масштаб  $\gamma$ .

1. Предельные эффективности ресурсов. Данные критерий характеризует зависимость изменения выпуска продукта при изменении потреблении ресурсов:

$$e_i = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

предельная эффективность по нефти:

$$e_i = \frac{\partial(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial x_i} =$$

$$= 2.36(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 23,7575x_1^{1.15}$$

При средних значениях факторов производства, использованных для определения типа ПФ значение предельной эффективности по нефти составило 1,18 млн рублей, что говорит о том, что за указанной период в среднем завод работал не на максимальной производительности;

предельная эффективность по электроэнергии:

$$e_i = \frac{\partial(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial x_i} =$$

$$= 2.36(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 22,575x_2^{1.15}$$

Значение предельной эффективности по электроэнергии составило 0,17 млн рублей, что говорит о том, дополнительное потребление электроэнергии в 1млн рублей даст прибыли только 0,17 млн. рублей, что говорит о том, что нужно стремиться сокращать потребление электроэнергии;

предельная эффективность по затратам на персонал:

$$e_i = \frac{\partial(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial x_i} =$$

$$= (11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot 0.02(60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{-0.98} \cdot 241.8x_3^{3.03}$$

Значение предельной эффективности по затратам на персонал составило 0,02 млн рублей, что говорит, что на данный момент можно рассмотреть дополнительные траты на персонал;

предельная эффективность по затратам на амортизацию:

$$e_i = \frac{\partial(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial x_i} =$$

$$= (11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot 0.02(60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{-0.98} \cdot 237x_4^{3.03}$$

Значение предельной эффективности по затратам на персонал составило 0,2 млн рублей, что говорит о том, затраты, проводимые на амортизацию оборудования в целом себя не окупают (0,2 млн на 1млн затрат) но в дальнейшей перспективе они могут приносить большую прибыль;

2. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам. Показывает, на сколько процентов увеличится выпуск, если объём привлечённого ресурса увеличится на 1%.

$$e_i = \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \ln x_i}$$

эластичность выпуска по нефти:

$$e_i = \frac{\partial \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial \ln x_i} =$$

$$= 2.36 \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 2.1x_1^{0.36}$$

Значение эластичности выпуска по нефти составило 0,76%;

эластичность выпуска по электроэнергии:

$$e_i = \frac{\partial \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial \ln x_i} =$$

$$= 2.36 \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 1.8x_2^{0.36}$$

Значение эластичности выпуска по электроэнергии составило 0,15%;

эластичность выпуска по затратам на персонал:

$$e_i = \frac{\partial \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial \ln x_i} =$$

$$= (11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot 0.02 \ln(60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 1.8x_3^{-1.02}$$

Значение эластичности выпуска по затратам на персонал составило 0,02%, что говорит о том, что увеличение затрат на персонал не влияют на производство в значительной степени;

эластичность выпуска по затратам на амортизацию:

$$e_i = \frac{\partial \ln(11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{2.36} \cdot (60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02}}{\partial \ln x_i} =$$

$$= (11.05x_1^{2.15} - 10.05x_2^{2.15})^{1.36} \cdot 0.02 \ln(60x_3^{4.03} - 59x_4^{4.03})^{0.02} \cdot 1.8x_3^{-1.02}$$

Значение эластичности выпуска по амортизации составило 0,03%, что, однако, выше эластичности по персоналу, а значит вкладываться в амортизацию выгоднее, чем в персонал;

3. Общий коэффициент эластичности выпуска  $E_i$  как сумма всех предыдущих частных показателей составил 0,96%, то есть при изменении всех факторов производства на 1% общий объём производства изменится на указанный выше показатель.

4. Показатель отдачи на масштаб  $\gamma$  рассчитан по формуле:

$$f(hx_1, hx_2, \dots, hx_n) = h^\gamma \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где  $h$  – некоторое целое положительное число.

При значении  $h = 2$  показатель отдачи на масштаб  $\gamma = 0,95$ , что говорит о том, что отдача убывающая.

В результате проделанной работы была определена экономико-математическая модель Московского НПЗ в виде производственной функции CES для 4-х параметров, а также рассчитаны основные характеристики. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3. Характеристики ПФ

Фактор производства	Сырая нефть	Энергетика	Персонал	Амортизация
Предельная эффективность,	1,18	0,17	0,02	0,2
Коэффициент эластичности	0,76	0,15	0,02	0,03
Общий коэффициент эластичности	0,96%			
Отдача на масштаб	0,95			

На основании анализа полученных данных можно сформулировать следующие выводы:

1. Дополнительное потребление сырой нефти возможно, но необходима более подробная экономическая оценка целесообразности, т.к. приносимая прибыль может оказаться ниже затрат на приобретение дополнительного ресурса;

2. Увеличение потребления электроэнергии приводит к падению прибыли, следовательно, нужно стремиться к сокращению её использования;

3. Возможно, стоит более детально рассмотреть возможность увеличения фонда затрат на персонал;

4. В то же время выявлено, что вложения в амортизацию хоть и не окупают себя в полной мере, всё же, это более прибыльно, чем вкладывать в увеличение фонда оплаты персонала.

5. При одинаковом увеличении факторов производства в  $n$  раз происходит увеличение выпуска продукции в  $0,95n$ , то есть отдача убывающая.

### **Литература:**

1. Тинтер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1967. - 361 с.

2. Про налоги в России [Электронный ресурс]: Интернет-информационное агентство Meduza IO/ Азуан А. URL: <https://meduza.io/feature/2016/11/25/stydnye-voprosy-pro-nalogi-v-rossii> (дата обращения: 10.08.2019).

3. АО Газпромнефть - МНПЗ [Электронный ресурс]: Сайт Московского нефтеперерабатывающего завода, 2018 г.. URL: <https://mnpz.gazprom-neft.ru/press-center/news/37566/> (дата обращения: 10.08.2019).

4. Колбин В.В. Производственная функция и ее свойства. – СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2008 – 111 с.

5. Колбин В. В. Специальные методы оптимизации. СПб: Лань, 2014 – 369 с.