www.esa-conference.ru

УДК 514

Рекуррентные уравнения обобщенных импульсов. Достаточные условия сохранения обобщенных импульсов k-ого порядка на решениях системы уравнений обобщенных импульсов (k-1)-ого порядка

Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц., Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет
Чернов С.В.
ОАО «Конструкторское бюро «Дисплей», Витебск
Карлов М.И., к. ф.-м. н., доц.
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Пастухов А.Ю.

Аннотация. *В работе рассматриваются свойства функций Лагранжа в расслоении скоростей порядка n. Основным полученным результатом являются рекуррентные уравнения обобщенных импульсов. Получены достаточные условия сохранения импульсов k-ого порядка на решениях уравнений импульсов k-1-ого порядка.*

Ключевые слова: *Функция Лагранжа, функция Гамильтона, вариационная задача, расслоённое пространство скоростей, уравнения Эйлера-Лагранжа, гладкие многообразия, законы сохранения.*

Recurrent equations of generalized inpulses. Sufficient conditions for the conservation of k-order impulses on solutions of the equations (k-1)-order impulses

Pastuhov Y.F, Pastuhov D. F, Chernov S. V., Karlov M. I., Pastuhov A. Y.

Введение. В работе получены уравнения связи для обобщенных импульсов порядков *k* и *k*-1 одного ранга *n*, а также обобщенных импульсов одного порядка *k* рангов *n* и *n*+1.Сформулированы и доказаны достаточные условия сохранения импульсов порядка *k* ранга *n* на решениях уравнений импульсов порядка *k*-1 ранга *n*.

Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x, \dots, \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Определение 1. Система функций $P_n = \{p_k^i(n)\} = \{p_{k,n}^i\}, n \in \bullet, k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$

$p_k^i(n) = p_{k,n}^i\left(x, \dot{x}, \dots, x^{(b(n,p,k))}\right) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$ называется обобщенным импульсом ранга n для функции $L: T^p X_m \to \Re$ в локальных координатах (x) базы X_m расслоения $T^p X_m$, где $L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$.

Функция $p_{k,n}^i$ называются k-ой компонентой обобщенного импульса P_n ранга *n* по i-ой координате или импульсами порядка k (k-импульсами) k по i-ой координате обобщенного импульса P_n ранга *n*.

Определение 2. Пусть $L: T^p X_m \to \Re$, $L(x, \dots, \overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Функция

$$H = H\left(x, \dot{x}, \dots, \overset{(a(n,p))}{x}\right) = H_n = H_n(L, x) = H(L, x, n) = -L\left(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i \overset{(k)i}{x} = -L\left(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}\right) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{k,n}^i D_t^k x^i = -L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dot{x}, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right) D_t^k x^i, \quad \overset{(k)i}{x} = D_t^k x^i, \tag{1}$$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L(x, \dots, \overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m} \tag{2}$$

где D_t^k - оператор k-кратного полного дифференцирования по времени t, называется гамильтонианом (функцией Гамильтона) ранга *n* этого преобразования двойственной к функции Лагранжа $L: T^p X_m \to \Re$, а также обобщенной энергией системы, состояние которой описывается функцией $L: T^p X_m \to \Re$ в локальной системе координат (x) в базе X_m расслоения $T^p X_m$. Имеет место следующая

Лемма Максимальные порядки производной по t $b(n,p,k)$ в выражениях (2) для $p_k^i(n)$

$$p_k^i(n) = p_{k,n}^i(x, \dot{x}, \dots, \overset{(b(n,p,k))}{x}) = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l D_t^l \left(\frac{\partial L\left(x, \dots, \overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right) \quad k = \overline{0,n}, i = \overline{1,m}$$

$$b(n,p,k) = \max(2\min(p,n) - k, p) = \begin{cases} 1)(p \le n) \begin{cases} 2p - k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \end{cases} \\ 2)(p \ge n), \max(2n - k, p), p \ge n \end{cases} = \begin{cases} 2p - k, & k \le p \le n \\ p, & p \le k \le n \\ \max(2n - k, p), & p \ge n \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Максимальный порядок производной по t порядка l в $p_k^i(n)$ равен $l + l + k = 2 \cdot l + k$ при $l + k \le p$. Если $l + k > p$, то $\frac{\partial L\left(x, \dots, \overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}} \equiv 0$ и, значит, коэффициент при производной $\overset{(l+k)i}{x}$ равен 0, следовательно, при определении максимального порядка производной по t можно считать $l+k\le p$ (в частности, $k\le p$, но $k\le n\Rightarrow k\le \min(n,p)$). Кроме того, $l\le n-k\Leftrightarrow l+k\le n\Rightarrow l+k\le \min(n,p)\Rightarrow l\le \min(n,p)-k\Rightarrow 2\cdot l+k\le$ $\le 2\cdot(\min(n,p)-k)+k=2\cdot\min(n,p)-2\cdot k+k=2\cdot\min(n,p)-k$, $p^i_{k,n}$ зависит от производных порядка

$$b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)=\begin{cases}1)(p\le n)\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p, & p\le k\le n\end{cases}\\ 2)(p\ge n),\ \max(2n-k,p),\ p\ge n\end{cases}\begin{cases}2p-k, & k\le p\le n\\ p, & p\le k\le n\\ max(2n-k,p), & p\ge n\end{cases}\qquad(4)$$

Учитывая определение $b(n,p,k)=\max(2\min(p,n)-k,p)$ при $p=n$ получим

$b(n,n,k)=b(n,p=n,k)=\max(2\min(n,n)-k,p)=\max(2n-k,n)=2n-k$, так как при $1\le k\le \min(p,n)\Rightarrow k\le n$ (5)

Этот же результат получается из (3) как граничный случай, так как из $p=n\Rightarrow(p\le n)\wedge(p\ge n)$ и, значит,

$2(p=n)-k=2n-k=\max(2n-k,p=n)=\max(2n-k,n)=2n-k$, так как при $1\le k\le\min(p,n)\le n$

Лемма доказана.

Функциональная часть системы уравнений Эйлера-Лагранжа порядка n может рассматриваться как импульсы 0-ого порядка ранга n:

$$p^i_{k=0,n}=\sum_{l=0}^{n-0}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l+0)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(l)i}{x}}\right)=0,i=\overline{1,m}\qquad(6)$$

Постановка задачи.

Пусть $L:T^pX_m\to\Re, L(x,\dots,\overset{(p)}{x})$ – локальная запись функции L в локальных координатах (x) в базе X_m расслоения T^pX_m.

Рассмотрим следующую задачу :как связаны обобщенные импульсы порядков k и $k-1$ одного ранга n. Имеет место следующая

Теорема 1 (дифференциальная связь импульсов k -ого и (k-1)-ого порядков ранга n). Пусть $L:T^pX_m\to\Re$ - гладкая функция Лагранжа.

$p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial\overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k=\overline{1,n},i=\overline{1,m}$ - импульс k-ого порядка по i-ой координате. $p^i_{k,n}=$ $\sum_{l_1=0}^{n-k}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k)i}}\right)$ импульс k-ого порядка, и соответственно

$p^i_{k-1,n}=\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)$ импульс (k-1) –ого порядка.

Тогда справедливо:

$$D_t p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})\qquad(7)$$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$D_t p^i_{k,n}=D_t\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right)=\sum_{l=0}^{n-k}D_t\left((-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t\left(D_t^l\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)\right)=$$

$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)=(-1)\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1}D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+k)i}}\right)=(-1)\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1}D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}\right)\right)$$

Сделаем замену $l_1=l+1$, так как $l=\overline{0,n-k}$ то $l_1=\overline{1,n-k+1}$. Поэтому,

$$D_t p^i_{k,n}=(-1)\left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{l+1}D_t^{l+1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l+1+k-1)i}}\right)\right)=(-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-k+1}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)\right)$$

$$=(-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+k-1)i}}\right)\right)=(-1)\left(\sum_{l_1=1}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}\right)\right)=$$

$$=(-1)\left(\sum_{l_1=0}^{n-(k-1)}(-1)^{l_1}D_t^{l_1}\left(\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial x^{(l_1+(k-1))i}}\right)-(-1)^0D_t^0\left(\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial x^{(0+(k-1))i}}\right)\right)=(-1)\left(p^i_{k-1,n}-\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\right)=-p^i_{k-1,n}+\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}\qquad(8)$$

Теорема 1 доказана. Следствием теоремы 1 является достаточное условие сохранения импульсов заданного порядка k на решениях уравнений импульсов порядка $k-1$. Более точно имеет место

Теорема 2 (достаточное условие сохранения импульсов k-ого порядка) $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L:T^pX_m\to\Re$ при выборе локальных координат (x) в базе расслоения X_m. Пусть $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - не зависит явно от $\overset{(k-1)i}{x}$, то есть $\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial\overset{(k-1)i}{x}}=0$. Тогда на решениях уравнений импульсов k-1-ого порядка k-ого порядка сохраняются: $p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)=const.$

В частности, если $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ не зависит явно от $x\Longrightarrow\frac{\partial L\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial x^i}=0$, то импульс 1-ого порядка $p^i_{k-1,n}=const.$

Доказательство: на решениях системы уравнений импульсов $k-1$-ого порядка $p^i_{k-1,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x})=0$

По теореме 1

$$D_t p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)=\frac{\partial L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}-p^i_{k-1,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k-1))}{x}\right)=0-0=0\Rightarrow D_t p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)=0\Rightarrow$$
$$p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})=const \quad (9)$$

Рассмотрим следующую задачу: как связаны обобщенные импульсы одного порядка k рангов n и $n+1$.
Справедлива следующая

Теорема 3 (о связи импульсов k-ого порядка рангов n и $n+1$). Пусть $L\colon T^pX_m\to\mathfrak{R}$. $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L\colon T^pX_m\to\mathfrak{R}$ при выборе локальных координат (x) в базе расслоения X_m, $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ $k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$-импульс k-ого порядка ранга n.

$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$ - импульс k-ого порядка ранга n+1. Тогда справедливо:

$$p^i_{k,n+1}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n+1,p,k))}{x}\right)=p^i_{k,n}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right), i=\overline{1,m}, k=\overline{0,n} \quad (10)$$

Доказательство:

$$p^i_{k,n+1}=\sum_{l=0}^{n+1-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(n+1-k+k)i}{x}}\right)=$$
$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)+(-1)^{n+1-k}D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right)=p^i_{k,n}+(-1)^{n+1-k}D_t^{n+1-k}\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(n+1)i}{x}}\right).$$

Так как $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right)$

Теорема 3 доказана. Очевидным следствием является

Теорема 4 $L\colon T^pX_m\to\mathfrak{R}$ - гладкая функция. $L(x,\dot{x},\dots,\overset{(p)}{x})$ - локальная запись функции $L\colon T^pX_m\to\mathfrak{R}$ при выборе локальных координат (x) в базе расслоения X_m, $p^i_{k,n}=\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l D_t^l\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(l+k)i}{x}}\right), k=\overline{0,n}, i=\overline{1,m}$-импульс k-ого порядка ранга n. $m,n\in N, m>n$ Тогда

$$p^i_{k,m}\left(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(m,p,k))}{x}\right)=p^i_{k,n}(x,\dot{x},\dots,\overset{(b(n,p,k))}{x})+\sum_{s=1}^{m-n}(-1)^{n+s-k}D_t^{n+s-k}\left(\frac{\partial L\left(x,\dots,\overset{(p)}{x}\right)}{\partial \overset{(n+s)i}{x}}\right), i=\overline{1,m}, k=\overline{0,n} \quad (11)$$

Литература:

1. Дубровин В.А. Современная геометрия. Методы и приложения / В.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: УРСС, 1994.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М. : Наука, 1974.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М. : Наука, 1974.
4. Волосова Н.К., Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Решение уравнения Пуассона в целых числах по модулю р с кусочно разрывной правой частью // Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 1-1 (47). С. 4-9.
5. Пастухов Ю.Ф., Пастухов А.Ю., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Чернов С.В. Поиск наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для обратной функции плотности распределения Лапласа (определение уровней восстановления для плотности распределения Лапласа) // Евразийское Научное Объединение. – 2021. № 1-1 (71). С. 49-54.
6. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
7. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2019. № 6-1 (52). С. 4-11.
8. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
9. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике // Евразийское Научное Объединение. –2021. № 1-1 (71). С. 9-14.
10. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций // Евразийское Научное Объединение. –2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
12. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне // Евразийское Научное Объединение. –2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
13. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. –2020. № 5-1 (63). С. 17-28.
14. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона - касательных парабол на комплексной плоскости // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

15. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Карлов М.И., Пастухов А.Ю. Тензор многомерного обобщенного 0-импульса 1-ого ранга // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 2-1 (72). С. 43-48.

16. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 50-53.

17. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление производных дробного порядка явной квадратурной формулой Гаусса с двумя узлами // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 1-1 (71). С. 14-19.

18. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 5-1 (75). С. 9-14.

19. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона - касательных парабол на комплексной плоскости // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 21-27.

20. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.

21. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Тензор Эйлера-Лагранжа в расслоении (преобразование многомерного обобщенного 0-импульса) // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 11-1 (69). С. 27-32.

22. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.

23. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 2-1 (60). С. 11-17.

24. Пастухов Ю.Ф., Пастухов А.Ю., Пастухов Д.Ф. Наилучшее приближение ступенчатыми функциями в метрике квадратичного отклонения для плотности распределения Лапласа // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 3-1 (61). С. 39-44.

25. Пастухов Ю.Ф. Поиск наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для распределения Коши // Евразийское Научное Объединение. 2019. № 10-1 (56). С. 10-15.

26. Волосова Н.К. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в "закрытой“ кювете. В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы 74-й научной конференции «Герценовские Чтения 2021». Российская Академия Образования; Академия информатизации образования; Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Кафедра математического анализа, Кафедра компьютерной инженерии и программотехники. Санкт-Петербург, 2021. С. 208-213.

27. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288

28. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В., Пастухов А.Ю. Условия сохранения обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа /Пастухов Ю.Ф. [и др.]. // Евразийское Научное Объединение. 2020. Т. 1. № 3(61). С. 32- 39.