www.esa-conference.ru

УДК 517.911.5

Применение метода Латта к дифференциальному уравнению с малым параметром

Назаркулова Б., Кененбаева Г.М., Өмүрзакова Г.К.

Аннотация. *В этой работе рассматривается анализ метода составных разложений для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром с краевыми условиями. Найдено разложение решения исходной задачи с использованием метода Латта.*

Ключевые слова: *метод составных разложений, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, метод Латта.*

Abstract. *In this article considers the analysis of the method of composite expansions for an ordinary second-order differential equation with a small parameter with boundary conditions. Found the decomposition of the solution of the original problem using the method of Latta.*

Keywords: *composite decomposition method, ordinary differential equation of the second order, Latte method.*

Введение.Существуют различные методы исследования задач с пограничным слоем, как, например, метод сращиваемых асимптотических разложений, метод составных разложений [1] и др.

Предположим, что в разложении зависимая переменная является суммой, состоящей из простейшей формой метода составных разложений.

В данной работе рассматривается анализ метода составных разложений для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной с использованием метода Латта.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$\varepsilon y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=0$

с краевыми условиями

$y(0)=\alpha,\quad y(1)=\beta$

где $\varepsilon>0$ - малый параметр, коэффициент при y' функция $A(x)$ сохраняет знак на всем промежутке $[0,1]$.

При $\varepsilon\to 0$ рассматриваемое уравнение переходит в дифференциальное уравнение первого порядка, и следовательно, одно из граничных условий должно быть опущено. При этом оказывается, что если $A(x)>0$ на промежутке $[0,1]$, то пограничный слой существует на левом конце $[0,1]$, а если $A(x)<0$ на промежутке $[0,1]$, то пограничный слой будет иметь место на правом конце. Ниже эти случаи рассмотрены на конкретных примерах.

Составное разложение рассматриваемой задачи в общем виде представимо следующим образом:

$$y(x,\varepsilon)=y^o(x,\varepsilon)+y^i(\xi,\varepsilon)-(y^o)^i, \qquad (1)$$

где $y-$ зависимая переменная, $\varepsilon>0$ — малый параметр, $x-$ внешняя переменняя, $\xi-$ внутренняя переменная.

Разложение (1) получается, как результат сложения внешнего и внутреннего разложений, из которого вычитается их общая часть $(y^o)^i$ или $\left(y^i\right)^o$.

Вместо того чтобы определить внешнее и внутреннее разложения, сращивать их и затем строить составное разложение, Латта предложил другой метод составных разложений.

Методом Латта найдем одночленное равномерно пригодное разложение следующей задачи:

$$\varepsilon y''(x)+(8x+1)y'(x)=1,\qquad 0\le x\le 1, \qquad (2)$$

$$y(0)=\alpha,\quad y(1)=\beta, \qquad (3)$$

где $\alpha,\ \beta-$ произвольные постоянные. Поскольку коэффициент при $y'(x)$ равен $A(x)=8x+1>0$ на промежутке $[0,1]$, неравномерность будет иметь место в окрестности точки $x=0$. Чтобы описать поведение y в области неравномерности, вводилось преобразование растяжение $\xi=x\varepsilon^{-1}$ и внутреннее разложение описывать с помощью функции $e^{-\xi}=e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$

Поскольку задача (2) и (3) содержит переменные коэффициенты, то y имеет одночленное разложение вида:

$$y=f_0(x)+e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0(x), \qquad (4)$$

где функция $g(x)$, которая определяется при анализе, эквивалентна x при $x\to 0$. Подставляя разложение (4) в уравнение (2) и краевые условия (3), имеем

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\varepsilon\left[f_0''(x)+\left(\frac{g'(x)}{\varepsilon}\right)^2\cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0(x)-2\left(\frac{g'(x)}{\varepsilon}\cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\right)\cdot h_0'(x)-\right.$$
$$\left.-\frac{g''(x)}{\varepsilon}\cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0(x)+e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0''(x)\right]+$$
$$+(8x+1)\left[f_0'(x)-\frac{g'(x)}{\varepsilon}\cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0(x)+e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\cdot h_0'(x)\right]=1,$$
$$y(0)=f_0(0)+h_0(0)=\alpha,$$
$$y(1)=f_0(1)+e^{-\frac{g(1)}{\varepsilon}}h_0(1)=\beta.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях ε^0, $\varepsilon^0 e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}$ и $\varepsilon^{-1}e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}$, получим уравнения для определения $g(x)$, $f_0(x)$ и $h_0(x)$, которые имеют вид:

$$h_0(x)g'(x)\big(g'(x)-(8x+1)\big)=0, \qquad (5)$$
$$(8x+1)f_0'(x)=1, \qquad (6)$$
$$h_0'(x)\big(8x+1-2g'(x)\big)-g''(x)h_0(x)=0. \qquad (7)$$

Краевые условия имеют вид:

$$f_0(1)=\beta, \qquad (8)$$
$$f_0(0)+h_0(0)=\alpha. \qquad (9)$$

Из (5) в силу того, что $h_0(x)\neq 0$ имеем:

$g'(x)=0$ или $g'(x)=8x+1$.

Первый случай $g'(x)=0$ приводит к $g(x)=const$ и не входит в рассмотрение, так как $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$.

Следовательно, из $g'(x)=8x+1$, имеем

$$g(x)=4x^2+x. \qquad (10)$$

Уравнения (6) с условием (8) имеет следующее решение:

$$f_0(x)=\beta+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{8x+1}{9}\right|. \qquad (11)$$

Так как $f_0(0)=\beta-\frac{1}{8}\ln 9$, то условие (9) имеет вид:

$$h_0(0)=\alpha-\beta+\frac{1}{8}\ln 9. \qquad (12)$$

Подставив (10) в (7), получаем

$(8x+1)h_0'(x)=-8h_0(x)$.

Это уравнение с условием (12) имеет решение вида

$$h_0(x)=\frac{1}{8x+1}\left(\alpha-\beta+\frac{1}{8}\ln 9\right). \qquad (13)$$

Подставляя (10), (11), (13) в (4), получаем:

$$y(x)=\beta+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{8x+1}{9}\right|+\left[\frac{1}{8x+1}\left(\alpha-\beta+\frac{1}{8}\ln 9\right)\right]e^{-\frac{4x^2+x}{\varepsilon}}. \qquad (14)$$

Разложение (14) является равномерно пригодным, для него выполняются краевые условия (3):

$$y(0)=\beta-\frac{1}{8}\ln 9+\alpha-\beta+\frac{1}{8}\ln 9=\alpha,$$
$$y(1)=\beta+(\text{э.м.ч.})=\beta,$$

где сокращение (э.м.ч.) используется для обозначения экспоненциально малых членов.

Замечание. Равномерно пригодное разложение задачи (2), (3) можно найти и когда коэффициент при $y'(x)$ отрицателен.

Используя методом Латта построить одночленное равномерно пригодное разложение уравнения

$$\varepsilon y''(x)-(2x^2+x+1)y'(x)=4x+1, \qquad 0\le x\le 1 \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0)=\alpha,\quad y(1)=\beta, \qquad (2)$$

где коэффициент при $y'(x)$ равен $A(x)=-(2x^2+x+1)<0$ на промежутке $[0{,}1]$, неравномерность будет иметь место в окрестности точки $x=1$. Внутренняя переменная $\xi=\frac{1-g(x)}{\varepsilon}$. Поскольку задача (1), (2) содержит переменные коэффициенты, то y имеет разложение вида

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_n(x)+e^{-\frac{(1-g(x))}{\varepsilon}}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n h_n(x)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

и при $n = 0$ получаем одночленное равномерно пригодное разложение

$$y = f_0(x) + e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0(x). \qquad (3)$$

Подставляя разложение (3) в уравнение (1), получаем

$$\varepsilon f_0''(x) + g''(x) e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + \left(\frac{g'(x)}{\varepsilon}\right)^2 \varepsilon e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0(x) +$$

$$+2g'(x) e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0'(x) + \varepsilon e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0''(x) -$$

$$-(2x^2 + x + 1)\left[f_0'(x) + \frac{g'(x)}{\varepsilon} \cdot e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0'(x)\right] = 4x + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях ε^0, $\varepsilon^0 e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}$, $\varepsilon^{-1} e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}$ получаем уравнения для определения $g(x)$, $f_0(x)$ и $h_0(x)$, которые имеют вид:

$$\varepsilon^{-1} e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}: \quad \left(g'(x)\right)^2 h_0(x) - (2x^2 + x + 1) g'(x) h_0(x) =$$
$$= g'(x) h_0(x)[g'(x) - (2x^2 + x + 1)] = 0, \qquad (4)$$

$$\varepsilon^0 e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}: \quad g''(x) h_0(x) + 2g'(x) h_0'(x) - (2x^2 + x + 1) h_0'(x) =$$
$$= h_0'(x)[2g'(x) - (2x^2 + x + 1)] + g''(x) h_0(x) = 0, \qquad (5)$$

$$\varepsilon^0: \quad -(2x^2 + x + 1) f_0'(x) = 4x + 1. \qquad (6)$$

Из (4) в силу того, что $h_0(x) \neq 0$ имеем

$$g'(x) = 0$$

или

$$g'(x) = 2x^2 + x + 1.$$

Первый случай приводит к $g(x) = const$ и не входит рассмотрение. Следовательно,

$$g(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + x. \qquad (7)$$

Подставляя разложение (3) в условия (2) получим краевые условия вида:

$$y(0) = f_0(0) + e^{\frac{g(0)-1}{\varepsilon}} h_0(0) = f_0(0) + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} h_0(0) = \alpha + \text{э.м.ч.} = \alpha,$$

$$f_0(0) = \alpha, \qquad (8)$$

$$y(1) = f_0(1) + e^{\frac{g(1)-1}{\varepsilon}} h_0(1) = f_0(1) + e^{\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-1}{\varepsilon}} h_0(1) =$$
$$= f_0(1) + e^{\frac{7}{6\varepsilon}} h_0(1) = \beta,$$

$$f_0(1) + e^{\frac{7}{6\varepsilon}} h_0(1) = \beta. \qquad (9)$$

Уравнение (6) с условием (8) имеет решение:

$$f_0(x) = \alpha - \ln|2x^2 + x + 1| \qquad (10)$$

и $f_0(1) = \alpha - \ln 4$.

Из условия (9) имеем

$$h_0(1) = (\beta - f_0(1)) e^{-\frac{7}{6\varepsilon}} = (\beta - \alpha + \ln 4) e^{-\frac{7}{6\varepsilon}}. \qquad (11)$$

Подставим (7) в (5), получим

$(2x^2 + x + 1) h_0'(x) + (4x + 1) h_0(x) = 0.$

Решение этого уравнения с условием (11) имеет вид:

$$h_0(x) = \frac{4}{2x^2 + x + 1}(\beta - \alpha + \ln 4) e^{-\frac{7}{6\varepsilon}}. \qquad (12)$$

Подставляя (7), (10) и (12) в разложение (3) получим одночленное равномерно пригодное разложение:

$$y(x) = \alpha - \ln|2x^2 + x + 1| +$$
$$+\frac{4}{2x^2 + x + 1}(\beta - \alpha + \ln 4) e^{\frac{4x^3 + 3x^2 + 6x - 13}{6\varepsilon}} + \cdots$$

Проверим выполнение краевых условий:

$$y(0) = \alpha - \ln 1 + 4(\beta - \alpha + \ln 4) e^{-\frac{13}{6\varepsilon}} = \alpha + \text{э.м.ч.} = \alpha,$$

$$y(1) = \alpha - \ln 4 + \beta - \alpha + \ln 4 = \beta.$$

Литература:

1.Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.
2.Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. –М.: Наука, 1969.
3.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, ч.1, 1973.

4.Назаркулова Б, Назаркулова Д.А. Методика решения некоторых задач методом сращиваемых асимптотических разложений.// Учебно-методическое пособие для студентов 3-5 курсов КНУ им. Ж.Баласагына. – Б.: ИЦ “Текник”, 2008.