ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 681.3.07

О дереве Коллатца

Морозов А.В., кандидат физ-мат. наук, проф.
Федеральное государственное казенное образовательное учреждение
ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», г. Санкт-Петербург
Пирожков М.А.
г. Санкт-Петербург

Аннотация. *Рассматривается структура и свойства дерева, порожденного динамической системой Коллатца. Введены функции, обеспечивающие формирование вспомогательных деревьев д1 и д2 для исследования дерева Коллатца (дК). Посредством фрактальной модели дК обосновано, что все ветви дК образуют множества натуральных чисел, непересекающихся между собой, объединение которых совпадает с множеством всех натуральных чисел. Для любого натурального числа, находящегося в вершине дК следует его достижимость из корня. В силу однозначности обратной функции вытекает сходимость к корню дК из вершины с любым натуральным числом в ней.*
Ключевые слова: *дерево, динамическая система Коллатца.*

About the Collatz Tree

Morozov A.V., phd, prof,
Federal state military educational institution of higher professional education
"Military space Academy named after A. F. Mozhaisky», Saint-Petersburg
Pirozhkov M. A.
Saint-Petersburg

Annotation. *The structure and properties of the tree formed by the Collatz dynamic system are considered. Functions are introduced that provide the formation of auxiliary trees d1 and d2 for studying the Collatz tree (dC). Using the DC fractal model, it is proved that all dC branches form sets of natural numbers that do not intersect with each other, the union of which coincides with the set of all natural numbers. For any natural number located at the vertex dC, its reachability from the root follows. Because of the uniqueness of the inverse function, convergence to the root of dC follows from a vertex with any natural number in it.*
Keywords: *tree, Collatz dynamical system.*

1. Определение. Динамическая система Коллатца на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ определяется $3n+1$ функцией [1-3]

$$T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, T(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, \text{если } n \text{ четное},\\ 3n+1, \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Функция $T(n)$ является функцией прообразом, т.к. по значениям n она вычисляет предыдущее значение $T(n)$.

Запишем ее в наших обозначениях

$$x^{-1}(n_1)=n=\begin{cases}\frac{n_1}{2}, \text{если } n_1 \equiv 0\ (mod\ 2),\\ 3n_1+1, \text{если } n_1\equiv 1\ (mod\ 2).\end{cases} \quad (1)$$

Введем теперь функцию образ, которая по аргументу n вычисляет следующее значение n_1

$$x(n)=n_1=\begin{cases}2n, \text{для } \forall\ n,\\ \frac{n-1}{3}, \text{если } n\equiv 1\ (mod\ 3).\end{cases} \quad (2)$$

Здесь надо добавить условие $n \equiv 0(mod\ 2)$, иначе (в случае нечетного n) надо было делить еще и на 2. Из условий $n\equiv 1\ (mod\ 3)$ и $n\equiv 0(mod\ 2)$, вместо (2) получаем

$$x(n)=n_1=\begin{cases}2n, \text{для } \forall\ n,\\ \frac{n-1}{3}, \text{если } n\equiv 4(mod\ 6).\end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что каждая вершина с номером n порождает одну или две вершины с номерами $x(n)$, что отражено в следующей таблице

Таблица **значений вершин дерева Коллатца**

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_1						3						5						7	
n_1	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46

www.esa-conference.ru

По таблице или, точнее, формуле (3) строится дерево Коллатца (дК) первые 10 уровней которого изображены на Рис.1. Вершина с номером 16 является корнем дерева. Из (3) и таблицы следует, что она порождает вершины с номерами 5 и 32, за которыми, в свою очередь, следуют 10 и 64 и т.д.

Получилось дерево с номерами вершин, расположенными в довольно хаотическом порядке, понять который поможет построение двух дополнительных деревьев д1 и д2.

2. Структура и свойства дерева д1

На Рис.2 изображено бесконечно-арное дерево (д1) каждый уровень которого соответствует нечетным вершинам дК (только они изображены горизонтально). Первый уровень д1 с номерами вершин 5, 21, 85, 341 и т.д. составляет слой нечетных вершин смежный стволу дК с номерами 16, 64, 256 и т.д. Вершины первого уровня порождают новые ветви и смежные нечетные вершины к ним составляют второй уровень в д1 и так далее. Степень каждой вершины д1 равна либо 1, если у ветви нет смежных нечетных вершин, либо бесконечности, т.к. в этом случае возникает счетное множество смежных нечетных вершин.

Номера вершин д1 позволяют установить функциональную зависимость номеров как одного уровня, так и между соседними уровнями. Номера вершин одного уровня связаны зависимостью

$$a_n = 5 \cdot 4^n + \frac{4^n - 1}{3}. \ (4)$$

Так, например, положив $a_0 = 5$ из (4) следует, что $a_1 = 21$, $a_2 = 85$,… При $a_0 = 3$, $a_1 = 13$, $a_2 = 53$ и т.д. (Рис.2).

Между вершинами соседних уровней имеет место следующая функциональная зависимость. Если n номер вершины i –го уровня, то смежная вершина с наименьшим номером $i + 1$ – го уровня определяется формулами

$$y_1(n) = \frac{2n - 1}{3}, \text{ если } n \equiv 2(mod\ 3) \ (5)$$

$$y_2(n) = \frac{4n - 1}{3}, \text{ если } n \equiv 1(mod\ 3) \ (6)$$

Для вершины 1–го уровня с номером $n = 5$ (Рис.2) $n \equiv 2(mod\ 3)$, поэтому $y_1(5) = 3$. Если $n = 85$, то $n \equiv 1(mod\ 3)$ и $y_2(85) = 113$. Заметим еще раз, что номера соседних вершин одного уровня связаны формулой

$y_3(n) = 4 \cdot n + 1$, (7)

что является частным случаем (4).

3. Система чисел, покрывающая натуральный ряд

Все вновь образуемые ветви имеют в своем основании вершины только с нечетными номерами в силу формулы $n_1 = \frac{n-1}{3}$. Если бы вершины с нечетными номерами были расположены в дК в полном составе $\{2n + 1, n = 1,2,3,\ldots\}$, то они образовали бы следующую систему чисел (часть этих вертикальных ветвей, записанные ниже в горизонтальном виде, мы и видим на Рис.1 для 3, 13, 53, 21, 85 и 341)

$$A_3 = \{3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, \ldots\} = \{3 \cdot 2^{k-1}, k = 1,2, \ldots\},$$
$$A_5 = \{5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^3, 5 \cdot 2^4, \ldots\} = \{5 \cdot 2^{k-1}, k = 1,2, \ldots\},$$
$$A_7 = \{7, 7 \cdot 2, 7 \cdot 2^2, 7 \cdot 2^3, 7 \cdot 2^4, \ldots\} = \{7 \cdot 2^{k-1}, k = 1,2, \ldots\}, \ (8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2n+1} = \{2n + 1, (2n + 1) \cdot 2, (2n + 1) \cdot 2^2, (2n + 1) \cdot 2^3 \ldots\} =$$
$$= \{(2n + 1) \cdot 2^{k-1}, k = 1,2, \ldots\}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Добавив множество, соответствующее самой правой ветви дК,

$$A_2 = \{2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2^2, 2 \cdot 2^3, 2 \cdot 2^4, \ldots\} = \{2 \cdot 2^{k-1}, k = 1,2, \ldots\},$$

получим, что эта система множеств в совокупности представляет натуральный ряд чисел $\mathbb{N}$.

Остается показать в следующем пункте, что в дК содержатся все вершины с нечетными числами.

4. Структура и свойства дерева д2.

Поскольку вершины с нечетными номерами расположены в сложном порядке и в неизвестном количестве, сосредоточимся только на них, т.к. вершины с четными номерами являются их производными и определяются по ним однозначно, как это следует из (8).

Для этого построим бинарное дерево д2, связывающее последовательно все нечетные вершины д1. Первая вершина с номером 5 (Рис.3) связана с двумя вершинами: по горизонтали с листом 21 и со смежной вершиной на втором уровне с наименьшим номером 3. Полученные вершины связаны только по горизонтали (Рис.3) с вершинами 13 и 85, которые, в свою очередь, соединяются с вершинами 17,53 и 113,341. Далее аналогично. Образ каждой вершины д2 вычисляется по формулам (5), (6) и (7). Дерево д2 это практически дК, из которого исключены все вершины с четными номерами. Можно сделать следующие выводы относительно дерева д2:

4.1. Все нечетные номера вершин д2 различные. Каждая вершина д1, как и д2, имеет номер, полученный из различных четных чисел вида $n = 2^k$ или $n = (2l + 1)\ 2^k$ по однозначной формуле $n_1 = \frac{n-1}{3}$ в случае, если $n \equiv 1(mod\ 3)$. Поэтому они не могут совпадать между собой.

4.2. Фрактальность структуры д2. Номера вершин в д2 определяются тремя функциями (5), (6), (7). Построим модель д2 в виде бинарного дерева с тремя уровнями (можно было бы и больше). Получается такое триарное дерево суперпозиций (на самом деле бинарное, т.к. выполняется одна из связей: либо $n \equiv 2(mod\ 3)$, либо $n \equiv 1(mod\ 3)$, либо их вообще нет, если $n \equiv 0(mod\ 3)$).

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$n$$

$$y_1 \qquad y_2 \qquad y_3$$

$$\frac{2n-1}{3} \qquad \frac{4n-1}{3} \qquad 4n+1$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3$$

$$\frac{4n-5}{9} \quad \frac{8n-7}{9} \quad \frac{8n-1}{3} \quad \frac{8n-5}{9} \quad \frac{16n-7}{9} \quad \frac{16n-1}{3} \quad \frac{8n+1}{3} \quad \frac{16n+3}{3} \quad 16n+5$$

Кроме того, видно, что все номера вершин различные, что будет продолжаться для любого количества уровней в силу различных начальных условий и различных функций.

Эта модель воспроизводит любую трехуровневую часть д2, если в корень модели вместо n подставить любое нечетное число. Например, при $n = 5$ получаем

5

3 21

13 85

и, тем самым, воспроизвели начало д2, а при $n = 227$ повторяем 6 элементов д2 с корнем 227 на четвертом уровне (Рис.3)

227

151 909

201 605 3637

4.3. В д2 находятся *все* нечетные вершины от $n = 3$ до произвольного сколь угодно большого числа $2n + 1$.

Это нетривиальное утверждение обосновывается применением модели бинарного дерева с тремя уровнями из п.5.2. Задавая любое нечетное число в качестве корня, получаем 7 элементов д2 которые там объективно находятся и вписываются в общую структуру д2.

К примеру, пусть $n = 1001$, тогда в д2 содержится блок вершин вида

1001

667 4005

889 2669 16021

причем можно вычислить и предшествующую нечетную вершину 751 для $n = 1001$.

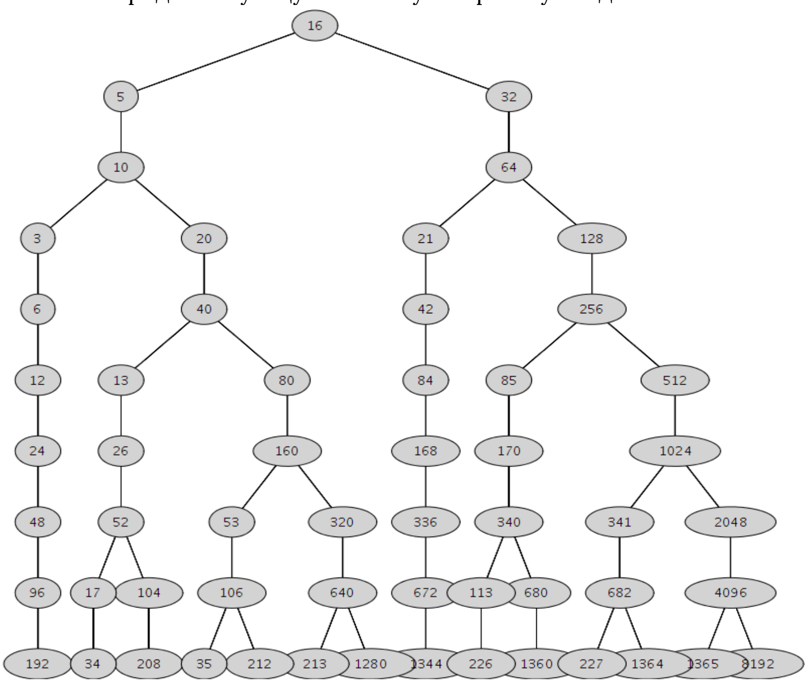

Рис.1. ***Дерево Коллатца.***

5. Выводы

5.1. В п.4.3 проведено обоснование существования *всех* вершин с *нечетными* номерами в д2, а следовательно, в дК.

5.2. Таким образом, из п.3 следует, что в системе (8) хотя нечетные числа и не идут по порядку, но по п.5.1 присутствуют *все* и *все* они *различны*, тем самым утверждается, что объединение множеств (8) совпадает с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.

5.3. Из п 5.1 и 5.2 следует, что любые натуральные числа, находящиеся в вершинах дК, достижимы по формуле (3) из корня с номером 16. В силу однозначности обратной функции (1) верно и обратное, т.е. сходимость к корню дК с номером 16 из произвольной вершины с любым натуральным числом в ней.

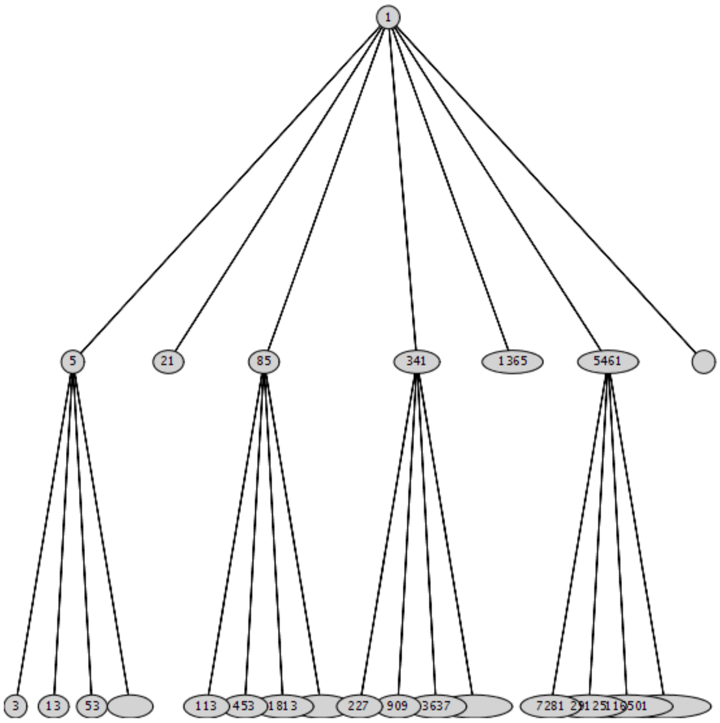

Рис.2. ***Дерево д1.***

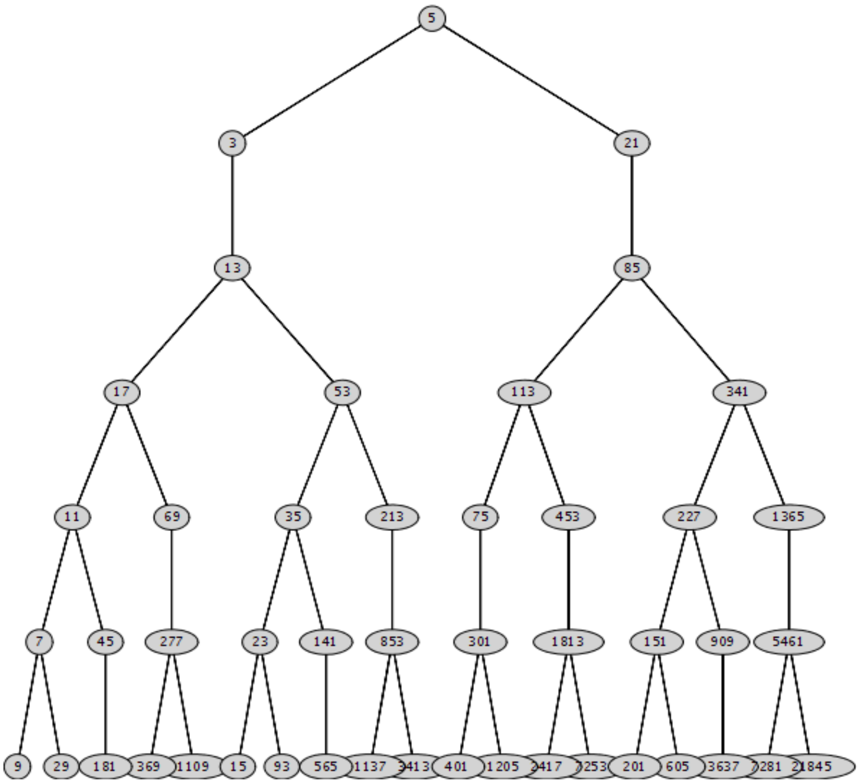

Рис.3. ***Дерево д2.***

Литература:

1. G. J. Wirsching. The Dynamical System Generated by the $3n + 1$ Function, Lecture Notes in Math. No. 1681, Springer-Verlag: Berlin 1998.

2. J. C. Lagarias. The $3x + 1$ problem: An annotated bibliography (1963–1999), http://arxiv.org/abs/math/0309224v13.

3. K. Sultan. The proof of the Collatz conjecture, http://vixra.org/abs/1708.0177.