Постулаты Евклида – источник геометрий Лобачевского и Римана

Мокейчев Валерий Степанович, кандидат
физико-математических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет

13 апреля 2018 г.

Становление математики, как науки, было положено Евклидом с использованием аксиом и постулатов [1].

Аксиомы

1: равные одному и тому же равны между собой;

2: если к равным добавим (соответственно отнимим) равное, то получим равные;

3: совмещающиеся с другим равны между собой;

4: целое больше части.

Постулаты:

1: от всякой точки до всякой точки можно провести прямую:

2: ограниченную прямую можно провести до прямой;

3: из всякого центра всяким раствором может быть описан круг;

4: все прямые углы равны между собой;

5: если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых углов.

Третья аксиома Евклида выглядит наиболее спорно. Под совмещающимися, по видимому, понималось мысленное совмещение, то есть два множества считались равными, если можно мысленно одно совместить с другим. Использованный термин равны очень не удачен. Действительно, каждую точку плоскости мысленно можно совместить с другой, каждую прямую на плоскости мысленно можно совместить с другой прямой на плоскости, однако назвать их равными нельзя, иначе бессмысленными станут понятия разные точки, разные прямые. К сожалению, аксиома осталась в учебниках по геометрии, Действительно, два треугольника считаются равными, если стороны одного треугольника равны сторонам другого треугольника, ибо их можно совместить. Из сказанного следует, что вместо слов "равны между собой" должно использоваться что-то иное. Подходящими являются "D-совпадают между собой". Это означает, что с помощью движения объекты совмещаются. Подробнее речь пойдёт ниже.

В связи с тем, что Евклид не приводит чётких понятий точки, отрезка, прямой, ему пришлость ввести постулаты. Ниже, с использованием чётких понятий выписанных объектов, доказываются постулаты Евклида.

Последователям показалось, что пятый постулат может быть доказан с использованием первых четырёх, и многие пытались доказать это. В результате получили, что пятый постулат можно выписать в эквивалентных редакция:

5.1: через заданную точку, не принадлежащую заданной прямой L, можно провести единственную прямую, параллельную L;

5.2: сумма внутренних углов треугольника равна 180^o.

Имеются и другие редакции. Тогда исследователи задались вопросом: можно ли построить теорию, используя только первые четыре постулата. Первым положительный ответ на этот вопрос дал ректор Казанского университета Н.И.Лобачевский, разработавший неевклидовую геометрию, предполагая, что сумма углов треугольника меньше 180^o. Позже Риман (1851) разработал более общую теорию, из которой следуют и геометрия Лобачевского, и геометрия Евклида, и геометрия, в которой сумма углов больше 180^o. В дальнейшем Гильберт выделил 20 аксиом, которые должны присутствовать в разработке любой геометрии [2].

Все исследователи признали, что невозможно доказать пятый постулат, используя 4 первых. На мой взгляд невозможность объясняется тем, что у Евклида отсутствует чёткое понятие прямой. Грубо говоря, Евклид называл прямой линию, которую можно изобразить на бумаге с помощью циркуля и линейки (с прямой стороной), то есть, нарисовать отрезок, соединяющий две точки, и используя любые две разные точки отрезка, с помощью той же линейки продолжить сколь угодно далеко ранее выписанный отреэок.

Ниже предлагается конструктивные понятия точки, прямой, плоскости, угла, и доказывается выполнимость постулатов Евклида.

Определение 1.*Пусть $n \geq 1$ – натуральное число; набор $X = (x_1, \ldots, x_n)$ вещественных чисел x_j называется n-мерной точкой; число x_1 называется первой координатой, x_2 – второй координатой и так далее; n-мерные точки X, Y совпадают (то есть X=Y), если соответствующие координаты совпадают; множество всех n-мерных точек обозначается R^n; подмножество из R^n всех точек, у которых меняются только координаты с номерами $j_1 \neq j_2$ обозначается $R^2_{j_1,j_2}$.*

Так как j_1 и j_2 фиксированы, то в дальнейшем . двумерные точки будут записываться в виде $A = (a, b),\ A_j = (a_j, b_j)$, полагается $A_j + tA_k = (a_j + ta_k, b_j + tb_k)$ для всех $t \in R$. Здесь и далее, R – множество всех вещественных чисел.

Определение 2. *Множество всех точек $A_1 + t \cdot (A_2 - A_1)$, где t пробегает R, называется прямой, проходящей через точки A_1, A_2, и обозначается $L(A_1A_2)$; множество всех точек $A_1 + t \cdot (A_2 - A_1)$, где t пробегает все числа от 0 до 1, называется отрезком, соединяющим точки A_1, A_2 и обозначается $[A_1A_2]$.*

В дальнейшем в записи $L(A_kA_m)$ автоматически предполагается, что $A_k \neq A_m$, запись $\xi \in R$ означает: ξ пробегает все вещественные числа.

Теорема 1 *Если $A_3 \in L(A_1A_2),\ A_4 \in L(A_1A_2),\ A_3 \neq A_4$, то $L(A_3A_4) = L(A_1A_2)$.*

Доказательство. В силу предположений существуют t_1, t_2 при которых $A_3 = A_1 + t_3(A_2 - A_1),\ A_4 = A_1 + t_4(A_2 - A_1)$. Поэтому $L(A_3A_4)$ имеет вид $\Big\{\Big(A_3 + \xi(A_4 - A_3), \xi \in R\Big)\Big\}$. После простых преобразований получим $L(A_3A_4) = \Big\{A_1 + (t + \xi(t_4 - t_3))(A_2 - A_1), \xi \in R\Big\}$. Обозначив $t = t_1 + \xi(t_4 - t_3)$, получим t пробегает R, когда ξ пробегает R, и наоборот.

Определение 3. *Две прямые называются пересекающимися, если они имеют общую точку.*

Теорема 2 *Прямые $L(A_1A_2),\ L(A_3A_4)$ пересекаются* $\Leftrightarrow\ \ \delta = (a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - (a_4 - a_3)(b_2 - b_1) \neq 0$.

Доказательство. Пусть прямые пересекаются в точке $A_0 = (a_0, b_0)$. Тогда при некоторых t_1, t_2 выполняются равенства
$a_0 = a_1 + t_1(a_2 - a_1) = a_3 + t_2(a_4 - a_3),\ b_0 = b_1 + t_1(b_2 - b_1) = b_3 + t_2(b_4 - b_3),$ (1)
то есть, разрешима система уравнений
$t_1(a_2 - a_1) - t_2(b_4 - b_3) = a_3 - a_1,\ \ t_1(b_2 - b_1) - t_2(b_4 - b_3) = b_3 - b_1.$ (2)
Так как одновременно числа $a_2 - a_1,\ b_2 - b_1$ (аналогично $a_4 - a_3,\ a_4 - a_3$) не могут быть нулями, то система уравнений (2) принимает вид

$$t_1\delta = \delta_1 = (a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - (b_1 - b_1)(b_4 - b_3),$$
$$-t_2\delta = \delta_2 = (a_3 - a_1)(b_2 - b_1) - (b_3 - b_1)(a_2 - a_1).$$

Из этих равенств следует, что t_1, t_2 существуют тогда, когда из равенства $\delta = 0$ следуют $\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0$. Пусть $\delta = 0,\ \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$. В этом случае можно задать либо t_1, либо t_2 произвольно. В случае $a_2 \neq a_1$ произвольным можно выбрать t_2 и вычислить t_1 из (2). В результате при $t_2 = 0$ получим $a_0 = a_3,\ b_0 = b_3$, и при $t_2 = 1$ окажется $a_0 = a_4,\ b_0 = a_4$, что противоречит $A_3 \neq A_4$. Аналогичное противоречие получится при произвольном выборе t_1. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Составим систему уравнений (2). Так как $\delta \neq 0$, то она разрешима. Следовательно, при некоторых t_1, t_2 выполняются (1), то есть $A_0 = (a_0, b_0)$ принадлежит и $L(A_aA_2)$, и $L(A_3A_4)$.

Следующим шагом введём понятие плоскости. Пусть прямые $L(A_1A_2),\ L(A_3A_4)$ пересекаются в единственной точке A_0; через P_0 обозначается множество всех прямых, пересекающих каждую из заданных прямые в точках, отличных от A_0; **тогда множество** $P = P_0 \bigcup L(A_1A_2) \bigcup L(A_3A_4)$ **называется плоскостью.**

Теорема 3 *Если точки A_1, A_2, A_3 не принадлежат одной прямой, и – разные, то существует единственная плоскость, которой принадлежат отмеченные точки.*

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно ввести прямые $L(A_1A_2), L(A_1A_3)$.

С этих пор под прямыми понимаются разные прямые, принадлежащие единой плоскости.

Теорема 4 *Каждая точка $A = (a, b)$ принадлежит плоскости, образованной двумя пересекающимися прямыми.*

Доказательство. Пусть плоскость образована прямыми $L(A_1A_2),\ L(A_3A_4)$, пересекающимися в точке A_0. Если A принадлежит одной из выписанных прямых, то всё доказано. Изучим противоположную ситуацию.

Пусть $A_1 \neq A_0, A_3 \neq A_0$. Следует убедиться в том, что существует прямая $L(B_1B_1)$, где $B_1 \in L(A_0A_1) = L(A_1A_2), B_2 \in L(A_0A_3) = L(A_3A_4)$, которой принадлежит A. Итак, $B_1 = \Big(a_0 + t_1(a_1 - a_0), b_0 + t_1(b_1 - b_0)\Big),\ B_2 = \Big(a_0 + t_3(a_3 - a_0), b_0 + t_3(b_3 - b_0\Big)$. Тогда $L(B_1B_2) = \Big\{(a_0 + t_1(a_1 - a_0) + t(a_o + (a_3 - a_0)),\ b_0 + t_3(b_3 - b_0) + t(b_o + (b_3 - b_0))), t \in R\Big\}$.
Поэтому $A \in L(B_1B_2) \Leftrightarrow$
$a_0 + t_1(a_1 - a_0) + t(a_o + t_3(a_3 - a_0)) = a,\ b_0 + t_1(b_1 - b_0) + t(b_o + t_3(b_3 - b_0)) = b$. при некоторых t, t_1, t_3. При $t = 1$ система уравнений принимает вид
$$t_1(a_1 - a_0) + t_2(a_3 - a_0) = a - 2a_0,\quad t_1(b_1 - b_0) + t_2(b_3 - b_0) = b - 2b_0. \qquad (3)$$
В силу теоремы 2 $(a_1 - a_0)(b_3 - b_0) \neq (a_3 - a_0)(b_1 - b_0)$, и система уравнений (3) однозначно разрешима.

Аналогично доказывается теорема в остальных случаях.

Определение 4. *Две непересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, называются параллельными.*

Теорема 5 *Пусть на плоскости имеются прямая и точка, не принадлежащая прямой. Тогда существует единственная прямая проходящая через точку и параллельная заданной прямой.*

Доказательство. Пусть $L(A_1A_2)$ – заданная прямая, и $A_0 \notin L(A_1A_2)$. Если докажем существование принадлежащей той же плоскости, при которой $L(A_1A_2), L(A_0A_3)$ не пересекаются, то докажем существование требуемой прямой.

Убедимся в существовании $(a_3, b_3) \neq (a_0, b_0)$, при которой
$$(a_2 - a_1)(b_3 - b_0) = (a_3 - a_0)(b_2 - b_1). \qquad (4)$$
В случае $a_2 \neq a_1$ достаточно выбрать $a_3 \neq a_0$ и вычислить b_3 из (4). Если $a_2 = a_1$, то $b_2 \neq b_1$, и $a_3 = a_0$. Поэтому (4) выполнится при любых $b_3 \neq b_0$. В силу теоремы 2 прямые $L(A_1A_2),\ L(A_0A_3)$ не пересекаются. Существование доказано. Докажем единственность. Пусть существует прямая $L(A_0A_4)$, параллельная $L(A_1A_2)$. Тогда в силу теоремы 2, вместе с (4) выполняется
$$(a_2 - a_1)(b_4 - b_0) = (a_4 - a_0)(b_2 - b_1).$$
После вычитания окажется
$$(a_2 - a_1)(b_4 - b_3) = (b_2 - b_1)(a_4 - a_3).$$
Поэтому для каждой $A_5 = (a_5, b_5) \in L(A_0A_4)$ выполняется
$$(a_2 - a_1)(b_5 - b_3) = (a_5 - a_3)(b_2 - b_1). \qquad (5)$$
Предположим, что $a_2 \neq a_1,\ a_4 \neq a_3$. Тогда при некотором t_1 имеет место $a_5 = a_0 + t_1(a_4 - a_0) = a_3$, после подстановки в (5) окажется $b_5 = b_3$, и в силу теоремы 1 $L(A_0A_5) = L(A_0A_4) = L(A_0A_3)$. Аналогично проверяется единственность в остальных случаях.

Часть плоскости называется множеством. Множества будут обозначаться Ω часто с индексами. Выше использовались простые множества: точка, прямая. Чтобы ввести понятие угла вводятся множество вида $\{A_0 + t(A_1 - A_0),\ t \geq 0\}$, называется положительно направленным лучом (обозначение $L_+(A_0A_1)$), исходящим из точки A_0 и проходящим через $A_1 \neq A_0$. Отрицательно направленным лучом, исходящим из A_0 и проходящим через $A_3 \neq A_0$ (обозначается $L_-(A_0A_3)$) называется множество $\{A_0 + t(A_3 - A_0),\ t \leq 0\}$. Очевидно, что $L_+(A_0A_1) \cup L_1(A_0A_1) = L(A_0A_1)$.

Ниже предполагается, что все лучи принадлежат одной плоскости, причём при использовании двух лучей автоматически предполагается, что лучи – разные.

Два луча $L_+(A_0A_1),\ L_+(A_0A_2)$ делят плоскость на два множества. Одно из них называется углом (обозначается $\angle A_1A_0A_2$), другое – дополнительным углом. Угол – это множество всех точек, расположенных между лучами, при этом точка $A_3 \neq A_0$ расположена между лучами $L_+(A_0A_1),\ L_+(A_0A_2)$, если $A_3 \in [B_1B_2]$, где $B_1 \in L_+(A_0A_1),\ B_2 \in L_+(A_0A_2)$; угол, образованный лучами $L_+(A_0A_1),\ L_-(A_0A_1)$, называется смежным к $\angle A_1A_0A_2$.

Определение 5. *Лучи $L_+(A_0A_1),\ L_+(A_0A_2)$ называются перпендикулярными, если*

$$(a_1 - a_0)(a_2 - a_0) + (b_1 - b_0)(b_2 - b_0) = 0; \qquad (6)$$

угол, образованный перпендикулярными лучами, называется прямым.

Теорема 6 *Угол, смежный с прямым, – прямой.*

Доказательство. Пусть $\angle A_1A_0A_2$ – прямой. Смежный угол определяется лучами $L_+(A_0A_1),\ L$ Пусть $A_3 \in L_-(A_0A_2)$, тогда $A_3 = A_0 + t_1(A_2 - A_0),\ t_1 < 0$. Тогда $L_-(A_0A_2) = L_+(A_0A_3)$, и $(a_1 - a_0)(a_3 - a_0) - (b_1 - b_0)(b_3 - b_0) = (a_1 - a_0)t_1(a_2 - a_0) - (b_1 - b_0)t_1(b_2 - b_0) = 0$. Поэтому смежный угол – прямой.

Другими важными множествами являются окружность и круг. Вводится расстояние между точками $\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$.

Определение 6. *Множество $\{A :\ \rho(A, A_0) \leq r\}$ (соответственно $\{A :\ \rho(A, A_0) < r\}$), где $A_0 = (a_0, b_0)$ фиксирована, называется замкнутым (соответственно открытым) кругом радиуса r, а точка A_0 – центром круга; множество $\{A :\ \rho(A, A_0) = r\}$ называется окружностью с центром в точке A_0.*

Определение 7. *Множества Ω, Ω_1 называются P-совпадающими, если существует A_0, для которого $\Omega_1 = \Omega + A_0 \equiv \{A + A_0, A \in \Omega\}$; преобразование $P_{A_0}(\Omega) = \Omega + A_0$ называется параллельным переносом Ω с помощью A_0.*

Теорема 7 *1: $[A_1A_2], [A_3A_4]$ P-совпадают $\Leftrightarrow$ существует A_0, при которой $A_3 = A_1 + A_0,\ A_4 = A_2 + A_0$;*

2: $L_+(A_0A_1) \cong L_+(A_2A_3) \Leftrightarrow$

$$(a_1 - a_0)(b_3 - b_2) = (a_3 - a_2)(b_1 - b_0),\ (a_1 - a_0)(a_3 - a_2) \geq 0, (b_1 - b_0)(b_3 - b_2) \geq 0; \qquad (7);$$

3: окружности P-совпадают $\Leftrightarrow$ имеют одинаковые радиусы; 4: замкнутые (соответственно открытые) круги P-совпадают $\Leftrightarrow$ имеют одинаковые радиусы.

Равенство в (7) в силу теоремы 1 означает, что лучи расположены на параллельных прямых, неравенства в (7) означают, что лучи одинаково направлены. Следует отметить, что лучи, расположенные на одной прямой, P-совпадают $\Leftrightarrow$ одинаково направлены.

Доказательство. Первое, третье и четвёртое утверждения очевидны. Докажем второе. Обозначим $\Omega_1 = P_{A_2 - A_0}(L_+(A_0A_1))$. Следует доказать, что $\Omega_1 = L_+(A_2A_3)$. Так как $a = a_0 + t(a_1 - a_0,\ b = b_0 + t(b_1 - b_0,\ t \geq 0$, то

$$\Omega_1 = \{a_2 + t(a_1 - a_0), b_2 + t(b_1 - b_0), t \geq 0\}. \qquad (8)$$

Изучим случай $b_3 = b_2$. Тогда $a_3 \neq a_2$, и в силу (7) $b_1 = b_2,\ a_1 \neq a_0,\ a_1 - a_0) = \lambda(a_3 - a_2),\ b_1 - b_0 = \lambda(b_3 - b_2)$, причём $\lambda > 0$. Отсюда и из (8) следует $\Omega_1 = \{(a_2 + t\lambda(a_3 - a_2), b_2 + t\lambda(b_3 - b_2)),\ t\lambda \geq 0\}$, $\Omega_1 = L_+(A_2A_3)$.

Аналогичные рассуждения справедливы в остальных случаях.

Теорема 8 $\angle A_1A_0A_2 \cong \angle A_4A_3A_5 \Leftrightarrow L_+(A_0A_1) \cong L_+(A_3A_4),\ L_+(A_0A_2) \cong L_+(A_3A_5)$.

Доказательство. Необходимость. Итак. существует A_6, при которой $P_{A_6}(\angle A_1A_0A_2) = \angle A_4A_3A_5$. В частности, это означает, что совпадают соответствующие лучи, пересекающиеся соответственно в точках $A_0 + A_6,\ A_3$. Поэтому $A_6 = A_3 - A_0$. Из доказательства теоремы 6 следует, что $P_{A_3-A_0}(L_+(A_0A_1)) = L_+(A_aA_4)$, то есть $L_+(A_0A_1) \cong L_+(A_3A_4)$. Аналогично проверяется $L_+(A_0A_2) \cong L_+(A_3A_5)$.

Достаточность. Выполняются последние два равенства. Как следует из доказательства теоремы 6, в этом случае $P_{A_3-A_0}(L_+(A_0A_1)) = L_+(A_3A_4),\ P_{A_3-A_0}(L_+(A_0A_2)) = L_+(A_3A_5)$. Докажем, если $A \in \angle A_1A_0A_2,\ A \neq A_0$, то $P_{A_3-A_0}(A) \in \angle A_4A_3A_5$. Напомним включение $A \in \angle A_1A_0A_2$ означает, что существуют $B_1 \in L_+(A_0A_1),\ B_2 \in L_+(A_0A_2)$, при которых $A \in [B_1B_2]$, то есть $A = B_1 + t_1(B_2 - B_1)$ при некотором $t_1 \in [0,\ 1]$. Имеем $P_{A_3-A_0}(A) = A + A_3 - A_0 = B_1 + A_3 - A_0 + t_1\Big((B_2 + A_3 - A_0) - (B_1 + A_3 - A_0)\Big)$. Это вместе с включениями $B_1 + A_3 - A_0 \in L_+(A_3A_4),\ B_2 + A_3 - A_0 \in L_+(A_3A_5)$, означает $P_{A_3-A_0}(A) \in \angle A_4A_3A_5$, то есть $P_{A_3-A_0}(\angle A_1A_0A_2) \subset \angle A_4A_3A_5$. Аналогично доказывается обратное включение.

Определение 8. *Вращением V_X множества Ω вокруг точки $0 = (0,0)$ называется множество $\Omega_1 = \{(ax_1 - bx_2, ax_2 + bx_1) :\ (a,b) \in \Omega\}$, где $X = (x_1, x_2),\ x_1^2 + x_2^2 = 1$; полагается $V_X(\Omega) = \Omega_1$; множества $\Omega_1,\ \Omega_2$ называются D-совпадающими, если существуют X, A_0, A_1, при которых $P_{A_1}\Big(V_X(P_{A_0}(\Omega_1))\Big) = \Omega_2$.*

Очевидно, что $P_0(\Omega) = \Omega,\ V_{1,0}(\Omega) = \Omega$.

Теорема 9 *Если $V_X,\ V_Y$ – операторы вращения вокруг точки (0,0), и $Y * X = \Big(x_1y_1 - x_2y_2, x_2y_1 + x_1y_2\Big)$, то V_{Y*X} – оператор вращения вокруг точки (0,0), причём $V_{Y*X} = V_YV_X$.*

Доказательство. Так как $|Y*X|^2 = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2 = x_1^6(y_1^2 + y_2^2 + x_2^2(y_1^2 + y_2^2) = 1$, то V_{Y*X} – оператор вращения вокруг точки (0,0). Пусть $A = (a,b)$. Тогда $V_X(A) = (ax_1 - bx_2, ax_2 + bx_1)$, и $V_Y(V_X(A)) = \Big((ax_1 - bx_2)y_1 - (ax_2 + bx_1)y_2,\ (ax_1 - bx_2)y_2 + (ax_2 + bx_1)y_1\Big) = V_{Y*X}(A)$.

Теорема 10 *D-совпадают множество всех прямых, множество всех лучей, множество всех отрезков одинаковой длины, множество всех прямых углов, множество всех окружностей одинаковых радиусов, множество всех замкнутых кругов одинаковых радиусов, множество всех открытых кругов одинаковых радиусов.*

Доказательство. Пусть $L(A_2A_3),\ L(A_4A_5)$ – прямые. Если они параллельны, то D-совпадение очевидно. В противоположном случае в силу теоремы 1 получим $L(A_1A_2) = L(A_6A_2),\ L(A_4A_5) = L(A_6A_5)$ (естественно при $A_6 \neq A_2,\ A_6 \neq A_5$). Положим $A_0 = -A_6$. Тогда $P_{A_0}(L(A_2A_3)) = L(0A_3^{,})$, где $A_3^{,} = A_3 - A_6$. Поэтому

$$P_{A_4}\Big(V_X(L(A_2A_3))\Big) = \Big\{(t(a_3^{,}x_1 - b_3^{,}x_2) + a_4,\ (t(b_3^{,}x_1 - a_3^{,}x_2) + b_4)),\ t \in R\Big\}.$$

Составим систему уравнений

$$a_2^{,}x_1 - b_2^{,}x_2 = \lambda(a_5 - a_4),\quad b_2^{,}x_1 + a_2^{,}x_1 = \lambda(a_5 - a_4).$$

Она однозначно разрешима, причём за счёт λ всегда можно добиться $x_1^2+x_2^2=1$. В результате получим $P_{A_4}\Big(V_X(P_{A_0}(L(A_2A_3)))\Big)=\{A_4+t\lambda(A_5-A_6),\ t\in r\}=L(A_4A_5)$.

D-совпадение прямых $L(A_2A_3),\ L(A_4A_5)$-доказано в случае $A_6\neq A_3, A_6\neq A_2$. Аналогично можно доказать в остальных случаях.

Легко проверить, что параллельный перенос и вращение вокруг точки (0,0) сохраняют расстояние между точками, поэтому почти очевидно, что D-совпадают лучи, D-совпадают отрезки одинаковой длины.

Для доказательства D-совпадений прямых углов на первом этапе рассмотрим случай смежных $\angle A_1OA_2,\ \angle A_1OA_3$. Первый угол образован лучами $L_+(OA_1),\ L_+()A_2)$, второй – лучами $L_+(OA_1),\ L_-(OA_2)$, ибо $A_3\in L_-(OA_2)$, и справедлива теорема 1. По определению прямого угла

$$a_1a_2+b_1b_2=0. \tag{9}$$

Требуем $V_X(L_+(OA_1))=L_-(OA_2)$. Это выполнится $\Leftrightarrow$

$a_1x_1-b_1x_2=\lambda a_2,\ a_1x_2+b_1x_1=\lambda b_2,\ \lambda<0,\ x_1^2+x_2^2=1.$

Пусть $b_1\neq 0$. Тогда в силу (9) $a_2\neq 0$ и $x_1=\dfrac{\lambda(a_1a_2+b_1b_2)}{a_1^2+b_1^2}=0,\ x_2=\dfrac{-\lambda a_2}{b_1}$.

Докажем $V_X(L_+(OA_2))=L_-(OA_1)$. Итак, $V_X(L_+(OA_2)=\{t(-x_2b_2,x_2a_2),\ t\geq 0\}$. Требуем $-x_2b_2=\gamma a_1,\ x_2=\gamma b_1$, где γ не известно. Она разрешима $\Leftrightarrow$ $x_2(b_2b_1+a_1a_2)=0$, а это выполняется в силу (9). Следовательно, $\gamma=-x_2\dfrac{a_2}{b_1}=-\lambda\Big(\dfrac{a_2}{b_1}\Big)^2>0$, и и $V_X(L_+(OA_2))=\{(t\gamma a_1,t\gamma b_1),\ t\gamma\geq 0\}=L_+(OA_1)$.

В случае $b_1=0$ в силу (9) имеем $a_1\neq 0,\ a_2=0,\ b_2\neq 0$. Поэтому $x_2=\lambda\dfrac{a_2}{a_1}$ и $V_X(L_+(OA_2))=\{(-tx_2b_2,tx_20),t\geq 0\}$. Требуем $-x_2b_2=\gamma a_1$. Тогда $\gamma=-\lambda\Big(\dfrac{b_2}{a_1}\Big)^2>0$. Поэтому $V_X(L_+(OA_2))=\{(t\gamma a_1,t\gamma 0),\ t\gamma\geq 0\}=L_+(OA_1)$.

Следующим шагом докажем D-совпадение прямых углов $A_1OA_2,\ A_3OA_4$. Вычислим X, при котором $V_X(L_+(OA_3))=L_+(OA_1))$. Это равенство выполнится $\Leftrightarrow$

$$a_3x_1-b_3x_2=\lambda a_1,\ b_3x_1+a_3x_2=\lambda b_1,\ \lambda>0,\ x_1^2+x_2^2=1,$$

то есть при $x_1=\dfrac{\lambda(a_3a_1+b_3b_1)}{b_3^2+a_3^2},\ x_2=\dfrac{\lambda(a_3b_1-b_3a_1)}{b_3^2+a_3^2},\ \lambda>0.$

Выпишем систему уравнений, в которой неизвестным является γ,

$$a_4x_1-b_4x_2=\gamma a_2,\quad b_4x_1+a_4x_2=\gamma b_2 \tag{17}$$

Для её разрешимости необходимо и достаточно $h\equiv(a_4b_2-b_4a_2)x_1-(b_4b_2+a_4a_2)=0$. Очевидно, что $h=a_1a_3a_4b_2-a_1a_2a_3b_4+b_1b_2b_3a_4-b_1b_3b_4a_2+b_2b_3b_4a_1+a_1a_2a_4b_3-b_1b_2b_4a_3-a_2a_3a_4b_1$. Однако углы – прямые, поэтому $a_1a_2+b_1b_2=0\ \ a_3a_4+b_3b_4=0$. После замен $a_1a_2=-b_1b_2,\ a_3a_4=-b_3b_4$ окажется $h=0$. Поэтому γ существует, причём $\gamma\neq 0$. Таким образом доказано, что $V_X(L_+(OA_4))=\{(t\gamma a_2,t\gamma b_2),\ t\geq 0\}$. А это означает $V_X(L_+(OA_4))=L_+(OA_2)$, если $\gamma>0$, и $V_X(L_+(OA_4))=L_-(OA_2)$ при $\gamma<0$. Во втором случае углы, образованные лучами $L_+(OA_1),\ L_+(OA_2)$ и $L_+(OA_1),\ L_-(OA_2)$ – смежные, поэтому в обоих случаях имеем D-совпадение.

С помощью параллельного переноса P_{-A_0} прямых углы $A_1A_0A_2,\ A_3A_0A_4$ преобразуются в прямые углы $(A_1-A_0)O(A_2-A_0),\ (A_3-A_0)O(A_4-A_0)$ и D-совпадают; с помощью преобразования $P_{A_0-A_5}$ прямые углы $A_1A_0A_2$, $A_3A_5A_4$ преобразуются в прямые углы поэтому D-совпадают.

Нетрудно убедиться в справедливости остальных утверждений.

Итак, **с использованием аксиом Евклида и выше приведенных понятий точки, прямой были доказаны постулаты Евклида**. Отталкиваясь от аксиом и постулатов Евклида, Декарт ввёл систему координат и получил уравнение прямой, проходящей через точки $A_1 \neq A_2$, как множество всех точек x, y, удовлетворяющих условию $(b_2-a_2)(x-a_1) = (b_1-a_1)(y-a_2)$. Очевидно, что это равносильны оба понятия прямой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Петров Ю.П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника. информатика.-СПб.: БХВ.Петербург, 2005.- 449 с.

2. *Базылев В.Т.* Гильберта система аксиом//Математическая энциклопедия, Т.1.-М., 1977.- С.970-971.