ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БРАУЕРА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ И ЕЁ ОБОБЩЕНИЯ

Мокейчев Валерий Степанович, кандидат физико-математических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет

28 марта 2019 г.

Теорема Брауэра гласит

если функция f непрерывно отображает ограниченное, замкнутое, выпуклое множество $\Omega \subset R^n$ в себя, то существует такая $x_0 \in \Omega$, что $f(x_0) = x_0$.

Если Ω — не выпуклое, но функцию f можно продолжить до непрерывной $g : \Omega_1 \to \Omega \subset \Omega_1$, где Ω_1 — ограниченное, замкнутое и выпуклое, то $g : \Omega_1 \to \Omega_1$, и существует $y_0 \in \Omega_1$, для которого $g(y_0) = y_0$; однако область значений для g — часть Ω, поэтому $y_0 \in \Omega,\ f(y_0) = y_0$. Продолжение всегда возможно, когда Ω — звёздное. Звёздность Ω означает, что Ω ограничено, и существует такая точка $z_0 \in \Omega$, что каждый луч, направленный из z_0 в сторону границы Ω, пересекает границу в единственной точке.

Брауэр сообщил о теореме в 1903 году на международном математическом конгрессе, а подробное доказательство было опубликовано только в 1910 году, что указывает на сложность доказательства, основанного на топологических рассуждениях. При этом Брауэр предполагал $n = 3$, а Ω — симплекс. Простое доказательство теоремы Брауэра получено только при $n = 2$ [1 стр.247 – 250]. В случае $n = 1$ теорема очевидна. Подробное доказательство теоремы Брауэра приведено в [2]. Важно отметить, что в доказательствах отсутствует ответ на вопрос: в каких случаях имеется несколько решений уравнения $f(y) = y,\ y \in \Omega$.

Ниже приводится простое доказательство теоремы при любом n, и выделяются случаи существования нескольких решений уравнения $f(y) = y,\ y \in \Omega$. При этом используются только те сведения, которые были известны до рождения Брауэра. Приведенные доказательства доступны студентам, обладаюшим элементарными сведениями из математического анализа. Они были сообщены на конференции [3].

Всюду $\tau = (\tau_1, ..., \tau_{n-1}) \in [a_{(n-1)},\ b_{(n-1)}],\ a_{(k)} = (a_1, ..., a_k),\ b_{(k)} = (b_1, ..., b_k)$, $[a_{(n-1)},\ b_{(n-1)}] = \{\tau :\ a_j \le \tau_j \le b_j,\ j = 1, ..., n-1\},\ \xi \in [a_n,\ b_n];\ a_k, b_k$—вещественные числа; $(a_{(n-1)},\ b_{(n-1)}) = (\tau : a_j < \tau_j < b_j,\ j = 1, \ldots, n-1);\ g(\tau, \xi)$ – скалярная непрерывная функция, причём $g(\tau, a) \cdot g(\tau, b) < 0,\ x = (\tau, \xi)$.

Определение 1. *Наименьший корень* $\xi(\tau) \in (a_n,\ b_n)$ *уравнения* $g(\tau, \xi) = 0$ *называется точкой перемены знака функции* $g(\tau, \xi)$, *если существуют такие* $\xi_{1,k} \to \xi(\tau) + 0,\ \xi_{2,k} \to \xi(\tau) - 0$, *что* $g(\tau, \xi_{1,k}) \cdot g(\tau, \xi_{2,k}) < 0$.

Новое доказательство опирается на три теоремы:

Теорема 1 *Если наименьший (соответственно наибольший) корень* $\xi(\tau)$ *уравнения* $g(\tau, \xi) = 0$ *является точкой перемены знака для* $g(\tau, \xi)$, *то он непрерывно зависит от* τ.

Теорема 2 *При каждом* $\varepsilon > 0$ *существует такая непрерывная функция* $g_\varepsilon(\tau, \xi)$, *что* $|g(\tau, \xi) - g_\varepsilon(\tau, \xi)| < \varepsilon$, *и наименьший её корень является точкой перемены знака для* $g_\varepsilon(\tau, \xi)$.

Теорема 3 *При каждом* $\varepsilon > 0$ *существует такая непрерывная функция* $\hat{g}_\varepsilon(\tau, \xi)$, *что* $|g(\tau, \xi) - \hat{g}_\varepsilon(\tau, \xi)| < \varepsilon$, *и наибольший её корень является точкой перемены знака для* $\hat{g}_\varepsilon(\tau, \xi)$.

Первая теорема принадлежит Филиппову И.Е., вторая и третья — Мокейчеву В.С. Подробно они доказаны в [4]. В конце данной статьи приведём основные моменты доказательств.

Докажем теорему Брауэра в случае $f : [a_{(n)}, b_{(n)}] \to (a_{(n)}, b_{(n)})$. Воспользуемся методом математической индукции, считая параметром n. При $n = 1$ справедливость теоремы очевидна. Предположим, что она верна при $k \le n - 1$. Докажем справедливость предположения при $k = n$.

Введём функцию $g(\tau, \xi) = f_n(\tau, \xi) - \xi$. Так как она непрерывна на множестве $\Omega = [a_{(n)},\ b_{(n)}]$, то в силу теорем 1–3 для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g_\varepsilon(\tau, \xi)$, что $|g(\tau, \xi) - g_\varepsilon(\tau, \xi)| < \varepsilon$, и уравнение $g_\varepsilon(\tau, \xi) = 0$ имеет непрерывно зависящее от τ решение $\xi(\tau, \varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $F(\tau) = \Big(f_1(\tau, \xi(\tau, \varepsilon)), ..., f_{n-1}(\tau, \xi(\tau, \varepsilon))\Big)$. Она непрерывна и отображает $[a_{(n-1)},\ b_{(n-1)}]$ в $(a_{(n-1)},\ b_{(n-1)})$. В силу индукционного предположения существует такая точка $\tau_\epsilon \in [a_{(n-1)},\ b_{(n-1)}]$, что $F(\tau_\epsilon) = \tau_\epsilon$. При этом $g_\epsilon(\tau_\epsilon, \xi(\tau_\epsilon, \varepsilon)) = 0$. Итак, имеем

$$f_j(\tau_\epsilon, \xi(\tau_\epsilon, \varepsilon)) = \tau_{\epsilon,j},\ j = 1, ..., n-1, \tag{2}$$

$$|f_n(\tau_\epsilon, \xi(\tau_\epsilon, \varepsilon)) - \xi(\tau_\epsilon, \varepsilon)| < \epsilon, \tag{3}$$

где $\tau_{\epsilon,j}$ — координата с номером j вектора τ_ϵ. При $\epsilon \to 0$ множества $\{\xi(\tau_\epsilon, \varepsilon)\},\ \{\tau_\epsilon\}$ ограничены. Поэтому существуют такие $\epsilon \to 0$, что $\tau_\epsilon \to \tau_0,\ \xi(\tau_\epsilon, \varepsilon) \to \xi_0$. Отсюда и из (2),(3) следуют равенства

$$f_j(\tau_0, \xi_0) = \tau_{0,j},\ j = 1, ..., n-1,\ f_n(\tau_0, \xi_0) = \xi_0,$$

то есть, $x_0 = (\tau_0, \xi_0)$ — неподвижная точка функции $f(x)$.

Докажем теорему Брауера в случае звёздной, ограниченной, замкнутой Ω. Пусть z — её центр. Положим $\tilde{f}(t) = f(t)$ при $t \in \Omega$. В случае $t \notin \Omega$ положим $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$, где $\psi(t)$ — точка пересечения границы Ω с отрезком $[z,\ t]$. Такая точка одна, и легко убедиться в непрерывности $\psi(t)$. Фиксируем $(a_{(n)},\ b_{(n)})$ так, чтобы $\Omega \subset (a_{(n)},\ b_{(n)})$. Тогда $\tilde{f} : [a_{(n)},\ b_{(n)}] \to (a_{(n)},\ b_{(n)})$. Поэтому существует y_0, для которой $\tilde{f}(y_0) = y_0$. Так как область значений $\tilde{f}$ принадлежит Ω, то $y_0 \in \Omega,\ f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$.

Следствие. Если f имеет непрерывную обратную и $f(\Omega) \supset \Omega$, где Ω — звёздное, ограниченное и замкнутое, то существует такое $y_0 \in \Omega$, что $f(y_0) = y_0$.

Ниже $\dfrac{\gamma x}{\nu} = \Big(\dfrac{\gamma_1 x_1}{\nu_1}, \ldots, \dfrac{\gamma_n x_n}{\nu_n}\Big)$ при $\nu_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Теорема 4 *Пусть f непрерывно отображает Q в Q_1, Q — звёздное, замкнутое, ограниченное, и существуют такие λ и μ, что $\dfrac{Q_1}{\lambda} \subset \dfrac{Q}{\mu}$. Тогда уравнение $f(x) = \dfrac{\lambda x}{\mu}$ имеет решение $x \in Q$.*

Доказательство. Введём $h(x) = \dfrac{f(\mu x)}{\lambda}$. Очевидно, что $h : \dfrac{Q}{\mu} \to \dfrac{Q_1}{\lambda},\ h : \dfrac{Q}{\mu} \to \dfrac{Q}{\mu} \equiv Q_2$. Поэтому существует $x_0 \in Q_2$, при котором $h(x_0) = x_0$, то есть $f(\mu x_0) = \lambda x_0$.

Замечание 1. В доказательстве теоремы Брауера использовались непрерывно зависящие от τ корни уравнения $g_{\varepsilon,n}(\tau, \xi) = 0$. Пусть $\xi_1(\tau, \varepsilon), \ldots, \xi_m(\tau, \varepsilon)$ – такие корни, причём они по парно отделимы, то есть $\inf\limits_{\tau,\varepsilon} |\xi_q(\tau, \varepsilon) - \xi_p(\tau, \varepsilon)| > 0$ при $q \neq p$. Тогда после предельного перехода получим m различных неподвижных точек у $f(x)$. Это, во-первых. Во-вторых, после перенумерации на последнем месте может оказаться любая из координат функции $f(x)$. В силу этого множество неподвижных точек у $f(x)$ может значительно увеличиться.

Идеи доказательств теорем 1,2. Пусть U_δ -окрестность точки $\xi(\tau)$. Если $|\tau - \tau_\varepsilon|$ достаточно мало, то $|g(\tau, \xi) - g(\tau_\varepsilon, \xi)|$ достаточно мало. Однако $g(\tau, \xi)$ меняет знак в U_δ, поэтому $g(\tau_\varepsilon, \xi)$ меняет знак в U_δ, и существует $y_\varepsilon \in U_\delta$, при котором $g(\tau_\varepsilon, y_\varepsilon) = 0$, причём $\xi(\tau_\varepsilon) \leq y_\varepsilon,\ \xi(\tau_\varepsilon) - \xi(\tau) \leq \delta$. В силу равномерной непрерывности g аналогично докажем $\xi(\tau_\varepsilon) - \xi(\tau) \geq -\delta$.

Пусть $g(\tau, a_n) > 0$. $g(\tau, \xi)$ равномерно непрерывна при $\xi \in [a_n, b_n],\ \tau \in [a_{(n-1)}, b_{(n-1)}]$. Полагаем $\xi_j = \dfrac{j(b-a)}{m}$, $j = 0, \ldots, m$, причём m настолько велико, что $|g(\tau, \xi) - g(\tau, \xi_j)| < \varepsilon/2$, если $\xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$, и вводим линейную на каждом отрезке $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ функцию $g_{1,\varepsilon}(\tau, \xi)$ с условиями $g_{1,\varepsilon}(\tau, \xi_j) = g(\tau, \xi_j)$. Если в окрестности её наименьшего нуля $\xi_{1,\varepsilon}(\tau)$ функция $g_{1,\varepsilon}(\tau, \xi)$ меняет знак, то полагаем $g_\varepsilon(\tau, \xi) = g_{1,\varepsilon}(\tau, \xi)$. В противном случае вводим $g_{2,\varepsilon}(\tau, \xi) = g_{1,\varepsilon}(\tau, \xi) + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Если $\xi_{1,\varepsilon}(\tau) \in [\xi_{j_1}, \xi_{j_1+1}]$, то наименьший нуль $\xi_{2,\varepsilon}(\tau)$ функции $g_{2,\varepsilon}(\tau, \xi)$ принадлежит $[\xi_{j_2}, \xi_{j_2+1}]$, где $j_2 > j_1$. Если $g_{2,\varepsilon}(\tau, \xi)$ не меняет знак в окрестности наименьшего нуля, то вводим $g_{3,\varepsilon}(\tau, \xi) = g_{2,\varepsilon}(\tau, \xi) + \delta$ и так далее. За счёт малости δ всегда можно добиться $k\delta < \varepsilon/m,\ g_{k,\varepsilon}(\tau, a_n) > 0,\ g_{k,\varepsilon}(\tau, b_n) < 0$. Поэтому $g_\varepsilon(\tau, \xi) = g_{k,\varepsilon}(\tau, \xi)$ при некотором $k \leq m$.

В случае $g(\tau, a_n) < 0$ в отмеченных рассуждениях следует вычитать δ. Аналогичные действия следует провести, если речь идёт о наибольшем корне уравнения $g(\tau, \xi) = 0$.

Пример для иллюстрации. $f(x)=\Big(f_1(x),\ f_2(x),\ (x_3-x_1/2)^2(x_3-(x_1+1)/2)^2+ax_3\Big)$, где $f_1(x),\ f_2(x)$ — непрерывные на $Q=\Big([0,1],\ [0,1],\ [0,1]\Big),\ a>0$ не зависит от x. Пусть $c_j=\max\limits_{Q}|f_j(x)|$. Очевидно, что $c_3=1+a,\ f(Q)=Q_1\subset\Big([0,c_1],\ [0,c_2],\ [a,1+a]\Big)$. Если $\mu_j>0,\ 0<\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\le\dfrac{1}{c_j},\ j=1,2,3$, то $\dfrac{Q_1}{\lambda}\subset\dfrac{Q}{\mu}$. В силу теоремы 4 уравнение $f(x)=\dfrac{\lambda}{\mu}x$ имеет решение $x\in Q$.

Напомним $x=(\tau,\xi)\in Q$. В случае $a=\dfrac{\lambda_3}{\mu_3}$ функция $g_{\varepsilon,3}(\tau,\xi)=\dfrac{f_3(\mu x)}{\lambda_3}-\xi=$ $\dfrac{(\mu_3\xi-\tau_1/2)^2(\mu_3\xi-(\tau_1+1)/2)^2}{\lambda_3}$ имеет корни $\xi_1(\tau)=\dfrac{\tau_1}{2\mu_3},\ \xi_2(\tau)=\dfrac{\tau_1+1}{2\mu_3}$, непрерывно зависящие от τ, причём $\inf\limits_{Q}|\xi_1(\tau)-\xi_2(\tau)|>0$. В силу замечания 1 уравнение $f(x)=\dfrac{\lambda}{\mu}x$ имеет, по крайней мере, два решения, принадлежащие Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Изд-во МГУ, 1984.– 296 с.

2. Данилов В.И. Лекции о неподвижных точках.– М.: Российская экономическая школа, 2006. – 32 с.

3. Мокейчев В.С. Теорема Брауера о неподвижных точках (простое доказательство и уточнения)// Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16 Саратовской зимней школы.– Саратов, 2012.– С.122—123.

4. I.E.Filippov and V.S.Mokeychev. The Least Root of a Continuous Function //Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol 39, №2.– pp.200—203.

Валерий Степанович Мокейчев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлёвская, д.18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Valery.Mokeychev@kpfu.ru