ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 517.956

Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка

Мамытов Айтбай Омонович, старший преподаватель
Ошский государственный университет
Асанов Авыт, доктор физико-математических наук, профессор
Кыргызско-Турецкий университет "Манас"
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, доктор физико-математических наук, профессор
Ошский государственный университет

Постановка задачи. Требуется найти функции $u(t,x)\in \mathrm{C}^{2,3}(\Omega), \mathrm{K}(t)\in \mathrm{C}[0,\mathrm{T}]$ и $\varphi(t)\in C[0,T]$, удовлетворяющие уравнению:

$$u_{tt}(t,x)=u_{ttxxx}-u_{xxx}+b(t,x)u+\int_0^t K(t-s)u(s,x)ds+\varphi(t)f(t,x)+F(t,x), \tag{1}$$

и условиям:

$$u(0,x)=\psi_0(x),\ u_t(0,x)=\psi_1(x),\ x\in[0,1], \tag{2}$$

$$u(t,0)=u_x(t,0)=u_x(t,1)=0, t\in[0,T], \tag{3}$$

$$u(t,x_1)=g_1(t),\ u(t,x_2)=g_2(t),\ t\in[0,T], x_1,x_2\in(0,1), x_1\neq x_2. \tag{4}$$

Решение задачи. Пусть выполняется условие:

$\mathbf{U_1}$. $b(t,x), f(t,x), \mathrm{F}(t,x), \psi_0(x), \psi_1(x), g_1(t), g_2(t)$ – известные, достаточно гладкие функции и выполняются условия согласования:

$$\psi_0(0)=\psi'_0(0)=\psi'_0(1)=0,\ g_i(0)=\psi_0(x_i),\ g'_i(0)=\psi_1(x_i), i=1,2.$$

Введем функцию: $v(t,x)=u_{tt}(t,x)$, тогда $u(t,x)=\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\psi_0(x)$ и уравнение (1) можно записать в виде:

$$v(t,x)=v_{xxx}-\int_0^t (t-s)v_{xxx}(s,x)ds-\psi'''_0(x)+b(t,x)\left(\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\psi_0(x)\right)+$$
$$+\int_0^t K(t-s)\left(\int_0^s (t-\tau)v(\tau,x)d\tau+\psi_0(x)\right)ds+\varphi(t)f(t,x)+F(t,x),$$

или

$$v_{xxx}(t,x)=\int_0^t (t-s)v_{xxx}(s,x)ds+P, \tag{5}$$

где

$$P=v(t,x)+\psi'''_0(x)-b(t,x)\left(\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\psi_0(x)\right)-\int_0^t K(t-s)\left(\int_0^s (t-\tau)v(\tau,x)d\tau+\psi_0(x)\right)ds-$$
$$-\varphi(t)f(t,x)-F(t,x),$$

Так как резольвента ядра $\mathrm{K}=(\mathrm{t}-\mathrm{s})$ равен $\mathrm{R}=\mathrm{sh}(\mathrm{t}-\mathrm{s})$, поэтому (5) можно записать в виде: $v_{xxx}(t,x)=\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)Pds+\mathrm{P}$ или

$$v_{xxx}(t,x)-v(t,x)=F_1(t,x)-b(t,x)\int_0^t (t-s)v(s,x)ds-\int_0^t K(t-s)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,x)d\tau ds-$$
$$-\psi_0(x)\int_0^t K(t-s)\mathrm{d}s-\varphi(t)f(t,x)-\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(\mathrm{s},x)\int_0^s (\mathrm{s}-\tau)v(\tau,x)d\tau+$$
$$+\int_0^s K(\mathrm{s}-\tau)\int_0^\tau (\mathrm{s}-\zeta)v(\zeta,x)d\xi d\tau+\psi_0(x)\int_0^s K(\mathrm{s}-\tau)\mathrm{d}\tau+\varphi(\mathrm{s})f(\mathrm{s},x)\big)ds \tag{6}$$

где

$$F_1(t,x)=\psi'''_0(x)-b(t,x)\psi_0(x)-F(t,x)+\int_0^t sh(t-s)(\psi'''_0(x)-b(s,x)\psi_0(x)-F(s,x))ds.$$

Из граничных условий (3) и обозначения $v(t,x)=u_{tt}(t,x)$ следует, что:

$$v(t,0)=v_x(t,0)=v_x(t,1)=0. \tag{7}$$

Пусть $k(t)=\int_0^t K(s)ds$, нетрудно заметить, что $\int_0^t K(t-s)ds=\int_0^t K(s)ds$, и $\int_\tau^t K(t-s)ds=k(t-\tau)$, а также:

$$\int_0^t \int_0^s K(t-s)(t-\tau)v(\tau,x)d\tau ds=\int_0^t (t-s)v(s,x)k(t-s)ds.$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$v_{xxx}(t,x)-v(t,x)=F_1(t,x)-b(t,x)\int_0^t (t-s)v(s,x)ds-\int_0^t (t-s)v(s,x)k(t-s)ds-\psi_0(x)k(t)-\varphi(t)f(t,x)-$$
$$-\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,x)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,x)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,x)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(x)k(s)+\varphi(s)f(s,x)\big)ds \tag{8}$$

Используя функцию Грина $G(x,\xi)$:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{x-\xi}-\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x-\xi}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-\xi)+\dfrac{\pi}{6}\right)-G_1(x,\xi),\ 0\le\xi\le x\le1; & \\ -G_1(x,\xi),\qquad 0\le x\le\xi\le1, & \end{cases}$$

краевой задачи

$$y'''(x)-y(x)=f(x), x\in(0,1), f\in C[0,1]$$
$$y(0)=y'(0)=y'(1)=0$$

где

$$G_1(x,\xi)=\frac{e^x-2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)}{3\left[e+2e^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]}\left(e^{1-\xi}+2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\xi)-\frac{\pi}{6}\right)e^{-\frac{1-\xi}{2}}\right).$$

Задачу (8)-(7) запишем в виде:

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left(F_1(t,\xi)-b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds-\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds-\psi_0(\xi)k(t)-\varphi(t)f(t,\xi)-\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\left(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\right)ds\right)d\xi. \quad (9)$$

Для упрощения записи введем обозначения, пусть:

$$m(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\psi_0(\xi)d\xi,\ c(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(t,\xi)d\xi,\ F_2(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi,$$

тогда интегро-дифференциальное уравнение (9) примет вид:

$$v(t,x)+m(\xi)k(t)+\varphi(t)c(t,\xi)=F_2(t,x)-\int_0^1 G(x,\xi)\left(b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds+\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\big)ds\right)d\xi \quad (10)$$

При $x=x_1$ и $x=x_2$ из соотношения(10) получаем:

$$v(t,x_i)+m(x_i)k(t)+\varphi(t)c(t,x_i)=F_2(t,x_i)-\int_0^1 G(x_i,\xi)\left(b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds+\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\big)ds\right)d\xi;\ i=1,2$$

или

$$m(x_i)k(t)+\varphi(t)c(t,x_i)=F_2(t,x_i)-g''(t)-\int_0^1 G(x_i,\xi)\left(b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds+\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\big)ds\right)d\xi;\ i=1,2$$

Пусть

$$Q_1y\equiv F_2(t,x)-\int_0^1 G(x,\xi)\left(b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds+\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\big)ds\right)d\xi;$$

$$Q_{i+1}y\equiv F_2(t,x_i)-g_i''(t)-\int_0^1 G(x_i,\xi)\left(b(t,\xi)\int_0^t (t-s)v(s,\xi)ds+\int_0^t (t-s)v(s,\xi)k(t-s)ds+\int_0^t \mathrm{sh}(t-s)\big(b(s,\xi)\int_0^s (t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau+\int_0^s (s-\tau)v(\tau,\xi)k(s-\tau)d\tau+\psi_0(\xi)k(s)+\varphi(s)f(s,\xi)\big)ds\right)d\xi;\ i=1,2$$

Таким образом, получили систему трех интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, относительно неизвестных функций $v(t,x),k(t),\varphi(t)$:

$$\begin{cases} v(t,x)+m(x)k(t)+c(t,x)\varphi(t)=Q_1y,\\ m(x_1)k(t)+c(t,x_1)\varphi(t)=Q_2y,\\ m(x_2)k(t)+c(t,x_2)\varphi(t)=Q_3y.\end{cases} \quad \text{или } D(t,x)y(t,x)=Qy, \quad (11)$$

где

$$D(t)=\begin{pmatrix}1 & m(x) & c(t,x)\\ 0 & m(x_1) & c(t,x_1)\\ 0 & m(x_2) & c(t,x_2)\end{pmatrix},\ y(t,x)=\begin{pmatrix}v(t,x)\\ k(t)\\ \varphi(t)\end{pmatrix}, Qy=\begin{pmatrix}Q_1y\\ Q_2y\\ Q_3y\end{pmatrix}.$$

U₂. Пусть $\det(d(t))\neq 0, t\in[0,T]$, где $d(t)=\begin{pmatrix}m(x_1) & c(t,x_1)\\ m(x_2) & c(t,x_2)\end{pmatrix}$.

Введем банахово пространство $\mathrm{X}=\mathrm{C}(\Omega)\times \mathrm{C}_2[0,\mathrm{T}]$ и обозначим

$y_0=\mathrm{colon}(F_2(t,x),\ F_2(t,x_1)-g_1''(t),\ F_2(t,x_2)-g_2''(t)),$

$d_1=\sup\limits_{0\le s\le t\le T}|sh(t-s)|,\ d_2=\sup\limits_{(x,\xi)\in[0,1]}|G(x,\xi)|,\ d_3=\sup\limits_{(t,x)\in\Omega}|b(t,x)|,\ d_4=\sup\limits_{x\in[0,1]}|\psi_0(x)|,\ d_5=\sup\limits_{(t,x)\in\Omega}|f(t,x)|,$

$c_0=\|D^{-1}(t)\|,\ r=c_0\cdot\|y_0\|$, где

$$\mathrm{D}(t)=\begin{pmatrix}1 & m(x) & c(t,x)\\ 0 & m(x_1) & c(t,x_1)\\ 0 & m(x_2) & c(t,x_2)\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим шар $B_{2r}(X)$ и покажем, что для достаточно малых *T* отображение *Q*: *X*→*X* переводит шар $B_{2r}(X)$ в себя и является сжимающим.

В этом шаре справедливы неравенства:

$$|Q_1y|\le|F_2(t,x)|+\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)rd_2, \quad (12)$$

$$|Q_{i+1}y|\le|F_2(t,x_i)-g_i''(t)|+\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)rd_2 \quad (13)$$

В силу этих оценок получим

$$\|\ y\ \|\le\|D^{-1}(t,x)\|\{\|Q_1y\|+\|Q_2y\|+\|Q_3y\|\}\le 3c_0\left(d_2d_3\frac{T}{2}(1+d_1)+d_2\frac{T}{2}r(1+d_1)+d_2d_1(d_4+d_5)\right)r+r. \quad (14)$$

Возьмем два любых элемента $y^1,y^2\in B_{2r}(X)$. Из (12) и (13) следует

$$\|Q_1y^1-Q_1y^2\|\le\|y^1-y^2\|\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)d_2,$$

$$\|Q_{i+1}y^1-Q_{i+1}y^2\|\le\|y^1-y^2\|\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)d_2$$

Отсюда имеем

$$\|Qy^1-Qy^2\|\le 3c_0\|y^1-y^2\|\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)d_2. \quad (15)$$

Из неравенств (14) и (15) следует, что неравенство

$$3c_0\left(\frac{T}{2}(1+d_1)(d_3+r)+d_1(d_4+d_5)\right)d_2<1.$$

будет условием сжимаемости отображения *Q*: *X*→*X*.

Согласно принципу сжимающих отображений система трех интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (11), относительно неизвестных функций $v(t,x),k(t),\varphi(t)$ имеет единственное решение. Решение можно построить методом последовательных приближений, составляя рекуррентные уравнения.

В итоге нами доказаны

Теорема 1. Пусть выполняются условия U_1, U_2 тогда система трех интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (13), относительно неизвестных функций $v(t,x), k(t), \varphi(t)$ в рассматриваемом пространстве при достаточно малом значений *T* имеет единственное решение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия U_1, U_2 тогда решение $u(t,x) \in \mathrm{C}^{2,3}(\Omega), \mathrm{K}(t) \in \mathrm{C}[0,\mathrm{T}]$ и $\varphi(t) \in C[0,T]$ обратной задачи (1)-(4) при достаточно малом значений *T* существует и единственно, явное решение можно построить методом последовательных приближений.

Литература:

1. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. – 511 с.
2. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
3. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Мамытов, А.О. Обратная задача для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переопределением во внутренних точках // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2015. – № 7. – С. 10–15.
5. Мамытов А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» 2021, том 13, № 3, С. 31–38.
6. Мамытов А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» 2021, том 13, № 2, С. 24–29.
7. Чеботарев А.Ю. Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2021, 61:2, 303–311.
8. Камынин В.Л. Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2021, 61:3, 413–427
9. Victor K.A., Stepanova I.V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2021, 14:4, 445–451.
10. Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем., 2021:3, 29–46.