www.esa-conference.ru

УДК 517.956

Об одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения пятого порядка

Мамытов Айтбай Омонович, старший преподаватель;
Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, доктор физико-математических наук, профессор
Ошский государственный университет

DOI: *10.5281/zenodo.5497585*

Введение. Обратные задачи впервые появились в практике, например, задача об определении скорости распространения сейсмических волн внутри нашей планеты по движению фронтов сейсмических волн по поверхности Земли. Нетрудно понять, насколько интересна и важна такая информация для физиков, геофизиков, врачей и вообще исследователей таких объектов и областей, проникновение внутрь которых либо слишком трудоемко, либо опасно, либо вообще невозможно [1–4]. Различные обратные задачи исследованы в [5–10], а также в цитируемых работах в них. Исследование теории и методы обратных задач интенсивно продолжается.

В статье предлагается конкретный алгоритм решения одной обратной задачи об источнике для интегро-дифференциального уравнения пятого порядка в частынх производных. Найдены достаточные условия, при выполнении которых гарантируется существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Постановка задачи

Исследуем разрешимость обратной задачи об источнике

$$u_{ttt}(t,x)=u_{xxttt}(t,x)-u_{xx}(t,x)+\int_0^t K(t-s)u_{sss}(s,x)ds+\varphi(t)h(t,x)+F(t,x), \quad (1)$$

$$u(0,x)=\psi_1(x), u_t(0,x)=\psi_2(x), u_{tt}(0,x)=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1, \quad (2)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\ 0\le t\le T, \quad (3)$$

$$u(t,x_0)=g(t), t\in[0,T], x_0\in(0,1). \quad (4)$$

где $K(t), F(t,x), \psi_i(x), h(t,x),$ – известные функций, T, x_0 – заданные положительные постоянные, а функций $u(t,x), \varphi(t)$ неизвестные, $\Omega=\{(t,x)\mid 0\le t\le T, 0\le x\le 1\}$.

Требуется найти достаточные условия разрешимости обратной задачи (10-(4).

Решение задачи

Пусть выполняются следующие условия:

$$U_1: F\in C(\Omega), \psi_i\in C^2[0,1], g\in C^3[0,T],$$

$$U_2: \varphi(0)=0, \varphi(1)=0, g(0)=\psi_1(x_0), g'(0)=\psi_2(x_0), g''(0)=\psi_3(x_0).$$

Введем обозначение:

$$v(t,x)=u_{ttt}(t,x), \quad (5)$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$v(t,x)=v_{xx}(t,x)-u_{xx}(t,x)+\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds+\varphi(t)h(t,x)+F(t,x), (t,x)\in\Omega \quad (6)$$

Интегрируя равенство (5) по переменной t и учитывая условие $u_{tt}(0,x)=\psi_3(x)$, получим: $u_{tt}(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+\psi_3(x)$, еще раз интегрируя последнее равенство по переменной t и учитывая начальное условие $u_t(0,x)=\psi_2(x)$, имеем:

$$u_t(t,x)=\int_0^t\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau+\psi_3(x)t+\psi_2(x),$$

отсюда, находим:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^\eta\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau d\eta+\psi_3(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2(x)t+\psi_1(x),$$

или

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 v(s,x)ds+\psi_3(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2(x)t+\psi_1(x), \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по переменной *x* дважды, имеем:

$$u_{xx}(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 v_{xx}(s,x)ds+\psi_3''(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2''(x)t+\psi_1''(x),$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (1) имеем:

$$v(t,x)=v_{xx}(t,x)-\left(\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 v_{xx}(s,x)ds+\psi_3''(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2''(x)t+\psi_1''(x)\right)+$$
$$+\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds+\varphi(t)h(t,x)+F(t,x), (t,x)\in G$$

или

$$v_{xx}(t,x)=\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 v_{xx}(s,x)ds+\tilde{F}, \quad (8)$$

где $\tilde{F}=v(t,x)+\psi_3''(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2''(x)t+\psi''_1(x)-\varphi(t)h(t,x)-F(t,x)-\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds.$

Докажем вспомогательную теорему.

Теорема 1. Резольвенту ядра $K(t,s)=\frac{1}{2}(t-s)^2$ можно представить в виде:

$$R(t,s)=\frac{1}{3}e^{t-s}-\frac{2}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right), (t,s)\in\Omega\,.$$

Доказательство. Как нам известно, для ядра и резольвенты справедливо тождество:

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s).$$

Пусть $R(t,s)=y''(x)$, где $x=t-s$, тогда тождество примет следующий вид:

$$y''(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-z)^2 y''(z)dz+\frac{1}{2}x^2,$$

Заметим, что $y''(0)=0$. Интегрируя интеграл по частям, получим:

$$y''(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-z)^2dy'(z)+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(x-z)^2y'(z)\Big|_0^x+\int_0^x (x-z)dy(z)+\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2y'(0)+\frac{1}{2}x^2+(x-z)y(z)|_0^x+\int_0^x y(z)dz-\frac{1}{2}x^2y'(0)+\frac{1}{2}x^2=-xy(0)+\int_0^x y(z)dz-\frac{1}{2}x^2y'(0)+\frac{1}{2}x^2.$$

Пусть $y'(0)=1, y(0)=0$ тогда последнее равенство можно записать в виде:

$$y''(x)=\int_0^x y(z)dz.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y'''(x)=y(x)$, с начальными условиями $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0$.

Решая эту задачу в Maple:

```
> restart : eq:= y'''(x) - y(x) = 0;
> ics:=y(0)=0, D(y)(0)=1, D(D(y))(0)=0;
> dsolve({eq,ics},y(x));
```

получим:

$$y(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

т.е.

$$y(t-s)=\frac{1}{3}e^{t-s}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right)-\frac{1}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right).$$

Дифференцируя дважды последнее равенство получим:

$$y''(x)=R(t,s)=\frac{1}{3}e^{t-s}-\frac{2}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right).$$

Проверка. Так как

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau=\frac{1}{6}\int_s^t (t-\tau)^2\left(e^{\tau-s}-2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)+\frac{\pi}{6}\right)\right)d\tau=\frac{1}{6}\int_s^t (t-\tau)^2d\left(e^{\tau-s}+2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{6}(t-\tau)^2\left(e^{\tau-s}+2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)\right)\right)\Bigg|_s^t+\frac{1}{3}\int_s^t (t-\tau)d\left(e^{\tau-s}+2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)-\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{1}{2}(t-s)^2+$$
$$+\frac{1}{3}(t-\tau)\left(e^{\tau-s}+2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Big|_s^t+\frac{1}{3}\int_s^t\left(e^{\tau-s}+2e^{-\frac{\tau-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\tau-s)-\frac{\pi}{6}\right)\right)d\tau=-\frac{1}{2}(t-s)^2+\frac{1}{3}e^{t-s}-$$
$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{3},$$

или

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau=-\frac{1}{2}(t-s)^2+\frac{1}{3}e^{t-s}-\frac{2}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right),$$

отсюда следует, что

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s)=\frac{1}{3}e^{t-s}-\frac{2}{3}e^{-\frac{t-s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)+\frac{\pi}{6}\right).$$

На основании этой теоремы 1 равенство (8) запишем в виде:

$v_{xx}(t,x)=\int_0^t R(t,s)\tilde{F}ds+\tilde{F}$, или

$$v_{xx}(t,x)-v(t,x)=\int_0^t R(t,s)\left(v(t,x)-\varphi(t)h(t,x)-\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds\right)ds-\varphi(t)h(t,x)-$$
$$-\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds+P(t,x), \tag{9}$$

где

$$P(t,x)=\int_0^t R(t,s)\left(\psi''(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2''(x)t+\psi_1''(x)-F(t,x)\right)ds+\psi_3''(x)\frac{t^2}{2}+\psi_2''(x)t+\psi_1''(x)-F(t,x).$$

Учитывая обозначение (5), для функции $v(t,x)$ получаем граничные условия вида:

$$v(t,0)=v(t,1)=0. \tag{10}$$

Задачу (9)–(10) исследуем при фиксированном t, здесь $v(t,x)$ – искомая функция.

Задачу (9)–(10) можно записать в виде:

$$v(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t R(t,s)\big(v(s,\xi)-\varphi(s)h(s,\xi)-\int_0^s K(t-\tau)v(\tau,\xi)d\tau\big)ds-\right.$$
$$\left.-\varphi(t)h(t,\xi)-\int_0^t K(t-s)v(s,\xi)ds+P(t,\xi)\right)d\xi, \tag{11}$$

где функция Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{sh(x-1)sh(\xi)}{sh1}, & 0\le\xi\le x,\\ \frac{sh(x)sh(\xi-1)}{sh1}, & x\le\xi\le 1.\end{cases}$$

Уравнение (11) перепишем в виде

$$v(t,x)=\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-\varphi(t)\int_0^1 G(x,\xi)h(t,\xi)d\xi-\int_0^t\int_0^t G(x,\xi)h(s,\xi)d\xi R(t,s)\varphi(s)ds+\tilde{P}(t,x)-$$
$$-\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)K(s)v(t-s,\xi)d\xi ds-\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(x,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds, \tag{12}$$

где $\tilde{P}(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)P(t,\xi)d\xi$.

Полагая $x=x_0$, и учитывая данные (4), а также равенство (5), из соотношения (12) имеем

$$\varphi(t)\int_0^1 G(x_0,\xi)h(t,\xi)d\xi=\int_0^t\int_0^1 G(x_0,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-\int_0^t\int_0^t G(x_0,\xi)h(s,\xi)d\xi R(t,s)\varphi(s)ds+$$
$$+\tilde{P}(t,x_0)-g'''(t)-\int_0^t\int_0^1 G(x_0,\xi)K(s)v(t-s,\xi)d\xi ds-\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(x_0,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds \tag{13}$$

В итоге мы пришли к системе из двух уравнений (12), (13). Из общей теории интегральных уравнений нам известно, что решение системы (12), (13) существует и единственно.

Следовательно справедлива

Теорема 2. Если выполняются U_1 U_2 и неравенство $\int_0^1 G(x_0,\xi)h(t,\xi)d\xi\neq 0, \forall t\in[0,T]$, то в пространстве $C^{2,2}(\Omega)\times C[0,T]$, решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

Литература:

1. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. – 511 с.
2. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
3. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Асанов, А. О существовании и единственности решения одной обратной задачи // Вестн. КазНУ им. Аль-Фараби.- Алматы, 2008. – №1(56).- С. 56-62.
5. Асылбеков, Т.Д. Коэффициентная обратная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка // Изв. Томского политех. ун-та. Сер. Математика и механика. Физика. – 2010.- Т.317, №2. - С. 22-25.
6. Матанова, К.Б. Об одной обратной задаче для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек, 2008. - Вып. 38. - С.118-124.
7. Matanova, K. The coefficient inverse problem for nonlinear fourth-order partial integro-differential equation // Abs. of the Fourth Cong. of the Turkic World Math. Soc. Baku, 1-3 July 2011. – P. 245 – 246.
8. Мамытов, А.О. Обратная задача для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переопределением во внутренних точках // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2015. – № 7. – С. 10–15.
9. Мамытов А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» 2021, том 13, № 3, С. 31–38.
10. Мамытов А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» 2021, том 13, № 2, С. 24–29.