

УДК 573.2:510.2

## Исследование эффекта бифуркации и моделей динамики численности популяций

Егерова Эльвира Николаевна, доцент, кандидат физико-математических наук  
Малафеева Ксения Алексеевна, студентка  
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет  
им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск)

**Аннотация.** В статье рассмотрена дискретная модель неограниченной и ограниченной одиночной популяции, приведен анализ особенностей эффекта бифуркации, исследована разностная модель, задаваемая логистическим уравнением. Рассмотрены графики зависимостей динамики популяций при различных значениях коэффициента роста численности популяции, при которых возникает эффект бифуркации, определено значение коэффициента роста  $r=3,8$ , при котором проявляется новая бифуркация, удвоение решения. Выведено соотношение, при котором возникают устойчивые точки.

**Ключевые слова:** эффект бифуркации, стационарные точки, устойчивая и неустойчивая точка равновесия, численность популяции, неограниченная и ограниченная популяция, логистическое конечноразностное уравнение.

## Research of the effect of bifurcation and models dynamics of the number of populations

Egereva E.N., Malafeeva K.A.  
National Research Mordovian State University N.P. Ogaryova

**Annotation.** The article considers a discrete model of an unlimited and limited single population, analyzes the features of the bifurcation effect, and studies the difference model given by the logistic equation. Graphs of the dependencies of population dynamics for different values of the population growth coefficient at which the bifurcation effect arises are considered, the value of the growth factor  $r = 3.8$  is determined, at which a new bifurcation appears, the solution doubles. A relation is derived for which stable points arise.

**Keywords:** bifurcation effect, stationary points, stable and unstable equilibrium point, population size, unlimited and limited population, logistic finite difference equation.

**Введение:** Популяционная динамика — это воссоздание изменения численности популяции во времени. [1] Одна из самых первых моделей популяционной динамики, описана в работе Фибоначчи, где решена задача, связанная с увеличением численности особей кроликов. Решением задачи является ряд чисел:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots, (1)$$

где два первых элемента соответствуют первому и второму периоду размножения, 12 последующих — месячному приросту поголовья кроликов. Каждый последующий элемент ряда равен сумме двух предыдущих. Ряд (1) вошел в историю как ряд Фибоначчи, а его члены получили название — числа Фибоначчи. Рекуррентная формула ряда имеет вид:  $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ .

В последствие Т. Мальтус описал численность популяции в виде:  $A_{n+1} = qA_n$  или  $dx/dt = rx$ , где  $r$  — коэффициент роста. Но модель Мальтуса не учитывает целого ряда естественных ограничений, которые регулируют численность популяции без искусственного вмешательства. Так в данной модели не учитывается фактор рождаемости и смертности [1]

Несколько усовершенствовал и впервые ввел системный фактор, который бы ограничивал рост популяции, Ферхюльст в уравнении логистического роста:  $dx/dt = rx(1 - x/K)$ , где  $K$  — емкость популяции, которая определяется ограниченностью ряда факторов для разных видов.

В современной экология большим прорывом стала теория системной динамики Дж. Форрестера. [4]

Для анализа особенностей эффекта бифуркации [6] рассмотрим дискретную модель неограниченной одиночной популяции. Пусть скорость роста популяции в период времени  $l$  прямо пропорциональна размеру популяции в начале этого периода.

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = ax_n (2)$$

Тогда численность популяции в каждый следующий момент времени будет определяться по формуле дискретного аналога экспоненциальной модели одиночной популяции. [5]

$$x_{n+1} = (1 + a)x_n \text{ или } x_n = (1 + a)^n x_0 \text{ (} n = 1, 2, 3, \dots \text{)} (3)$$

Так, при  $a > 0$ ,  $(1 + a) > 1$  имеем  $(1 + a)^n \rightarrow \infty$  — неограниченный рост; при  $a > 0$ ,  $1 + a = 1$  — численность популяции не изменится; если  $-1 < a < 0$ ,  $0 < 1 + a < 1$ , то есть  $x_n \rightarrow 0$  — происходит вымирание популяции; ли  $a = -1$  — вымирание популяции происходит за один период времени; если  $a < -1$  — соответствует нереальной ситуации, так как численность становится отрицательной.

При определенном начальном значении можно рассчитать динамику популяции во времени. В зависимости от того как изменяется коэффициент роста  $r = a + 1$  возможны следующие случаи, представленные на графиках (Рис.1 — Рис.5).

Классическим примером дискретных моделей представляется логистическое конечноразностное уравнение для одиночной лимитированной популяции [3] Дискретный аналог экспоненциальной модели (3) одиночной нелIMITированной

популяции предполагает неограниченный рост численности популяции. В реальности же ни одна популяция не может увеличиваться до бесконечных размеров вследствие ограниченности как пищевых ресурсов, так и других ограничивающих внешних факторов[2] Для учета этого обстоятельства введем обязательное условие ограничения роста. Пусть  $r = r(1 - x_n)$ . Тогда из уравнения (3) получим логистическое уравнение, описывающее динамику популяций

$$x_{n+1} = x_n r(1 - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Необходимо также отметить, что здесь  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq r \leq 4$ . При других значениях  $x$  и  $r$  логистическое уравнение будет давать отрицательные значения численности популяции, что будет описывать нереальную ситуацию.

Задавая различные значения естественной скорости роста  $r$  и начальной численности популяции, можно получить качественно различные типы поведения переменной, удовлетворяющие разностному уравнению (4).

Перепишем формулу (4) в виде:  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) (5)

Функция  $f(x) = rx(1 - x)$  в (5) является нелинейной квадратичной функцией от  $x$ , поэтому может характеризоваться сложным поведением.

Примем за неподвижную точку уравнения (5) называется решение вида  $x_n = x^* = const$ , то есть точку удовлетворяющую соотношению

$$x^* = f(x^*) \quad (6)$$

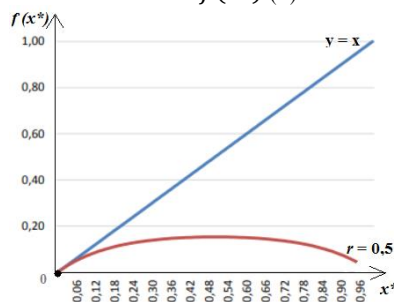


Рис.1. Зависимость динамики популяции от коэффициента роста ( $r = 0,5$ )

Из Рис.1 видно, что стационарная точка  $x = 0$ , то есть существует единственное нулевое предельное значение последовательности в диапазоне  $0 < r < 1$ .

При  $r = 3,5$  происходит первая бифуркация, появляются два новых решения и решение удваивается. Наряду с  $x^* = 0$  при  $r \geq 1$  появляется решение  $x^* = (r - 1)/r$ . На Рис.2 видно, что при  $r = 3,5$  имеется два решения  $x = 0, x = 0,7$ , которые могут быть получены из уравнения

$$x^* = x^* r(1 - x^*) \quad (7)$$

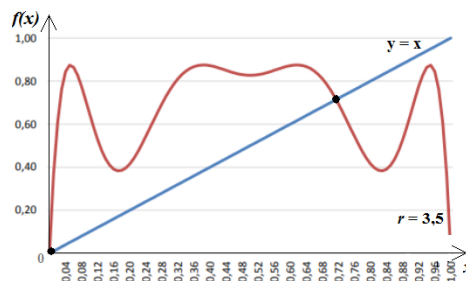


Рис.2. Первая бифуркация  $f(x)$  при  $r = 3, 5$

Значения точки  $x_n$  могут как приближаться к точке  $x^*$ , так и постепенно удаляться от нее. Устойчивость описанного процесса (5) напрямую зависит от угла наклона кривой  $f(x)$  в стационарной точке. Если угол наклона прямой с осью не превышает по модулю  $45^\circ$ , то неподвижная точка будет устойчивой[3] То есть  $|f'(x)| < 1$ , где для устойчивой неподвижной точка  $f' = r(1 - 2x)$ . Неподвижная точка обязательно становится неустойчиво при  $r = \pm \frac{1}{|1-2x^*|}$ . Таким значением является  $r = 3,8$ , при котором проявляется новая бифуркация, удвоение решения. Неподвижные точки в данном случае определяются уравнением

$$x^* = f(f(x^*)) \quad \text{или} \quad x^* = r^2 x^* (1 - x^*) (1 - r x^* (1 - x^*)) \quad (8)$$

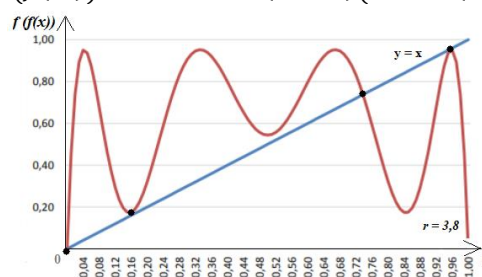


Рис.3. Вторая бифуркация  $f(f(x))$  при  $r = 3, 8$

На Рис.3 имеются четыре решения:  $x = 0, x = 0,168, x = 0,747, x = 0,962$ , два из которых являются устойчивыми. Значением, при котором появится еще одна бифуркация –  $r = 3,9$ , следовательно, решение будет удвоено еще раз. Не подвижные точки в этом случае определяются уравнением  $x^* = f(f(f(x^*)))$  или

$$x^* = r^3 x^* (1 - x^*) (1 - r^2 x^* (1 - x^*) (1 - r x^* (1 - x^*))) (1 - r x^* (1 - x^*)) \quad (9)$$

На Рис.4 показаны следующие решения:  $x = 0, x = 0,132, x = 0,180, x = 0,448, x = 0,578, x = 0,743, x = 0,951, x = 0,964$

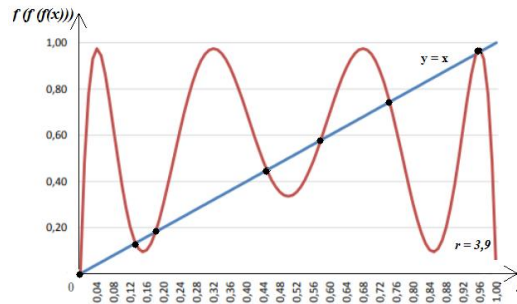


Рис.4. Третья бифуркация  $f(f(f(x)))$  при  $r = 3,9$

Рассмотрим значение параметра  $r$ , при котором вновь можно проследить эффект бифуркации. Устойчивые точки при следующем процессе бифуркации определяются уравнением:  $x^* = f(f(f(f(x^*))))$ , или

$$x^* = r^4 x^* (1 - x^*) (1 - r^3 x^* (1 - x^*) (1 - r^2 x^* (1 - x^*) (1 - r x^* (1 - x^*) (1 - r^2 x^* (1 - x^*) (1 - r x^* (1 - x^*))))) (1 - r x^* (1 - x^*)) \quad (10)$$

Значения  $x$   $x=0; x=0,039; x=0,042; x=0,13; x=0,17; x=0,281; x=0,358; x=0,46; x=0,559; x=0,641; x=0,75; x=0,81; x=0,91; x=0,936; x=0,987; x=0,992$ .

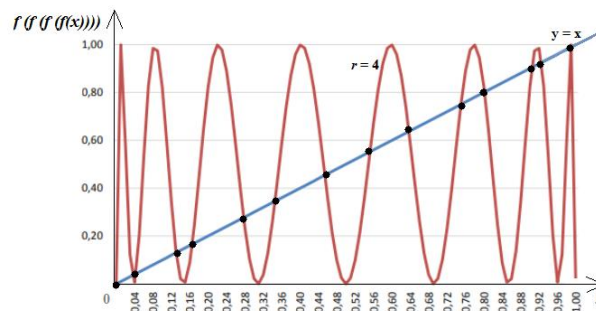


Рис.5. Четвертая бифуркация  $f(f(f(f(x))))$  при  $r = 4$

**Вывод:** Таким образом, при новом значении  $r$  вновь произойдет удвоение решения логистического уравнения, и тогда появляется цикл с периодом все более и более высокого порядка и т.д. Если же производная рассматриваемой функции по модулю в какой-либо точке становится больше 1, неподвижная точка расщепляется на две и возникает новый устойчивый цикл. Поэтому процесс удвоения периода будет происходить до бесконечности.

#### Литература:

1. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М., Изд. МГУ, 1993, 301 с.
2. Саранча Д.А. Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. М.: МФТИ, 1996. 251с.
3. Каменев Г.К., Лысенко Н.А., Люлякин О.Н., Поляновский В.О., Саранча Д.А., Юрезанская Ю.С. Использование методов математического моделирования для анализа экологических объектов. М.: ВЦ РАН, 2015. 118 с.
4. Fuller, F. An index of fixed point type for periodic orbits // Amer. J. Math. 89 (1967). Pp.133—148.
5. Georgy K. Kamenev, Oleg P. Lyulyakin, Dmitry A. Sarancha, Nikolai A. Lysenko, and Valery O. Polyanskiy. From chaos to order. Difference equations in one ecological problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2016, 31 (5) Pp. 253-265.
6. Медведев В.С. О новом типе бифуркаций на многообразиях // Мат. сб., 1980. Т. 113, №3. С. 487-492.