ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION

Волновая функция фотона в координатном представлении

Львов Олег Сергеевич

Предлагается вариант волновой функции фотона в координатном представлении, основанный на использовании положительно-частотной части 4-вектора-потенциала волнового электромагнитного поля. Указываются тензоры и операторы основных динамических показателей фотона.

Вводятся новые показатели фотона - тензор и оператор поляризации.

Введение

Считается, что волновой функции фотона (ВФФ) в координатном представлении не существует, в то время как таковая существует в импульсном представлении [1], [2]. Действительно, при переходах атомного электрона из одного состояния в другое излучаются квантованные цуги электромагнитных волн - фотоны с практически постоянной частотой, что и явилось причиной введения волновой функции фотона в импульсном (спектральном) представлении. Однако фотоны успешно детектируются в оптическом диапазоне волн как в случае монохроматического, так и общем случае полихроматического волнового электромагнитного поля (ЭМП) в различных точках пространства. Поэтому нет оснований для отказа от введения ВФФ в координатном представлении, которая будет определять плотность вероятности обнаружения фотона и плотность вероятности потока фотонов в любой точке координатного пространства при произвольном спектральном составе ЭМП. Вместе с волновой функцией могут быть введены динамические показатели волнового цуга (пакета) ЭМП, а также тензоры плотности и операторы названных показателей.

Согласно представлениям автора, изложенным в работе [3], фотон является не квазиточечным физическим объектом, а абстрактным понятием - квантом действия волнового ЭМП. Будем называть фотонным цугом пространственно ограниченный пакет электромагнитных волн. При анализе цуга волнового ЭМП понятие количество фотонов будет использоваться в качестве меры квантового действия поля в единицах $\hbar$. Понятие квантового действия (далее используется термин действие) и вектора плотности-потока действия введено автором в головной статье 1 публикации "Волновая природа микромира" [3], формула (1), и уточнено в следующей статье 2, формула (9). Отметим, что вектор плотности-потока действия с точностью до множителя $\hbar$ совпадает с вектором плотности-потока вероятности обнаружения частицы.

Теоретическое обоснование

Волновую функцию фотона в координатном представлении логично построить на основе 4-вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ свободного ЭМП, поскольку этот показатель широко используется в волновых уравнениях и формулах квантовой механики. Кроме того, при использовании вектора-потенциала возможно введение 4-вектора плотности-потока вероятности обнаружения фотона и естественное разделение момента импульса квазичастицы - фотона на спиновую и орбитальную составляющие, чего нельзя сделать при описании ЭМП с помощью его тензора напряженности $\boldsymbol{F}_{ij}$. Именно ввиду последнего обстоятельства все попытки введения ВФФ не нашли общего признания [2].

Отметим, прежде всего, возможность инвариантного разделения вектора-потенциала волнового электромагнитного поля на две части - вихревую $\boldsymbol{A}_r$ и градиентную $\boldsymbol{A}_g$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^{p^2}} = 0, (j^i), \text{где } x^0 = ct;\ i = \{0,1,2,3\};\ p = (1,2,3). (1)$$

Первая - вихревая часть определяется запаздывающим потенциалом электрического тока-заряда, плотность которого j^i должна фигурировать (вместо нуля) в правой части уравнения (1) в области источников волнового ЭМП.

Вторая - градиентная часть вектора-потенциала $A_i = \frac{\partial h}{\partial x^i}$ является 4-градиентом скалярного потенциала h, где скалярная функция h в свою очередь удовлетворяет некоторому скалярному волновому уравнению типа (1) со скалярными источниками. При этом вихревая составляющая удовлетворяет дополнительному соотношению

$$\frac{\partial A_r^p}{\partial x^p} = 0 \text{ , где } p = (0,1,2,3), (1r)$$

а градиентная составляющая - соотношению

$$\frac{\partial A_g^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_g^k}{\partial x^i} = 0 \text{ , где } i,k = \{0,1,2,3\} \text{ при } i \neq k. (1g)$$

При рассмотрении спектральных решений волнового уравнения (1) вида плоской волны первое из вышеприведенных соотношений (1r) записывается в виде $k_p a_p = \omega \cdot a_0/c,$ и называется условием 4-поперечности волнового вектора, а второе соотношение (1g), записываемое в виде $a_i/k_i = a_0/\omega_0$, i = {1, 2, 3}, носит название условие продольности. Здесь символы a_i обозначают амплитуды соответствующих компонент вектора-потенциала, k_i - пространственные компоненты волнового вектора, по повторяющемуся индексу $p = (1, 2, 3)$ производится суммирование. Отметим, что в области, свободной от источников скалярного поля, спектральные составляющие градиентного поля также формально подчиняются условию 4-поперечности, которое в данном случае сводится к релятивистскому соотношению между компонентами волнового вектора $k_p k_p = (\omega/c)^2$.

Далее нас будет интересовать лишь вихревая составляющая вектора-потенциала. При этом мы не будем использовать градиентную составляющую вектора-потенциала и трехмерную калибровку вихревого вектора-потенциала если это не оговорено особо, тем самым сохраняя релятивистскую инвариантность вектора-потенциала и определяемых на его основе показателей фотона.

Следуя формулам квантовой электродинамики (КЭД), где для волновой функции излученного и поглощенного фотонов с заданным импульсом используются комплексные составляющие вектора-потенциала с разным знаком частоты, будем рассматривать отдельно комплексную положительно-частотную часть вектора-потенциала и его отрицательно-частотную часть. Первую A_i будем считать волновой функцией фотона, вторая же A_i^* будет представлять комплексно-сопряженную ВФФ. Именно такой выбор ВФФ позволяет получить формулу для 4-вектора плотности-потока действия его поля, а также ввести операторы динамических показателей фотона при использовании лагранжевой вариационной методики. Вновь введенные комплексные величины сохраняют полную информацию о волновом ЭМП (сумма положительно-частотной части поля с ее сопряженной величиной равна исходному ЭМП), и по-прежнему подчиняются уравнению (1) с положительно- или отрицательно-частотной составляющей плотности зарядов-токов в правой части уравнения.

Лагранжиан комплексного волнового уравнения вида (1) для свободного поля из условия получения симметричного канонического тензора энергии-импульса и сохраняющихся по отдельности орбитального и спинового моментов фотонного цуга выбирается равным

$$L = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_k^*}{\partial x^p}\,\frac{\partial A^k}{\partial x_p}.$$

Здесь по индексам k и p производится суммирование, k, $p = (0, 1, 2, 3)$.

Выбранному лагранжиану отвечают волновые уравнения вида (1) для положительно-частотной и отрицательно-частотной части вектора-потенциала. Согласно формулам вариационной методики получим следующие выражения для плотности-потока действия, канонического тензора энергии-импульса и тензора плотности спинового момента свободных фотонов:

$$J_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_p^*}{\partial x^k}\,A^p - A_p^*\,\frac{\partial A^p}{\partial x^k}\right), (2)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\,\frac{\partial A_p^*}{\partial x^s}\,\frac{\partial A^p}{\partial x_s} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_p^*}{\partial x^i}\,\frac{\partial A^p}{\partial x^k} + \frac{\partial A_p^*}{\partial x^k}\,\frac{\partial A^p}{\partial x^i}\right), (3)$$

$$M_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x^k}\,A_j - A_i^*\,\frac{\partial A_J}{\partial x^k} + \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,A_j^* - A_i\,\frac{\partial A_j^*}{\partial x^k}\right). (4)$$

Сюда же добавим найденный эвристическим методом новый показатель - тензор плотности поляризации фотона

$$\Pi_{ijk} = \frac{i}{2\hbar}\left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x^k}\,A_j - A_i^*\,\frac{\partial A_J}{\partial x^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,A_j^* + A_i\,\frac{\partial A_j^*}{\partial x^k}\right). (5)$$

Истоки указанных тензоров равны нулю, а их интегральные аналоги (интеграл берется по всей области существования рассматриваемой векторной волновой функции) равны соответственно действию фотонного цуга, его вектору энергии-импульса, антисимметричному тензору спинмомента, и симметричному тензору поляризации, которые в случае свободного поля сохраняются во времени.

При вычислении интегральных показателей фотонного цуга подынтегральные выражения могут быть упрощены путем их преобразования к операторной форме записи на основе соотношения

$$O_i = \int O_{i0}\;d^3x = i\int \frac{\partial A_p^*}{\partial x^0}\hat{O}_i A^p\,d^3x, (5)$$

где O_i — искомый показатель фотона,

O_{i0} — компонента тензора его плотности и

$\hat{O}_i$ — оператор искомого показателя.

Приведенное выражение (5) справедливо для скалярных (индекс i исключается) и векторных показателей фотона. В случае тензорных показателей оператор Φ имеет более сложный вид. Соответствующее выражение, связывающее искомый тензор и отвечающий ему оператор, имеет вид

$$O_{ij} = \int O_{ij0}\,d^3x = i\int \frac{\partial A_p^*}{\partial x^0}\,\hat{O}_{ij}^{pq}\,A_q\,d^3x. (6)$$

Преобразования с использованием формул (5, 6) дают следующие выражения для операторных интегралов и соответствующих операторов действия, вектора энергии-импульса, спинового момента и тензора поляризации:

$$J = i\int \frac{\partial A_p^*}{\partial x^0}\,A^p\;d^3x\,, \hat{J} = 1, (7)$$

$$P_i = -\int \frac{\partial A_p^*}{\partial x^0}\,\frac{\partial A^p}{\partial x^i}\,d^3x\,, \hat{P}_i = -i\frac{\partial}{\partial x^i}, (8)$$

$$M_{ij} = i\int\left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x^0}\,A_j - \frac{\partial A_j^*}{\partial x^0}\,A_i\right)d^3x\,, \widehat{M}_{ij} = \delta_i^p\delta_j^q - \delta_j^p\delta_i^q, (9)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{\partial A_i^*}{\partial x^0}\,A_j + \frac{\partial A_j^*}{\partial x^0}\,A_i\right)d^3x\,,\ \widehat{\Pi}_{ij} = \frac{1}{\hbar}\left(\delta_i^p\delta_j^q + \delta_j^p\delta_i^q\right). (10)$$

Некоторые подробности получения указанных выражений можно видеть в статье [4].

Далее остановимся на вопросах градиентной или калибровочной инвариантности вектора-потенциала, которой придается большое значение в квантовой теории. Прежде всего, напомним, что спектральные составляющие градиентной части вектора-потенциала характеризуются нулевым значением модуля в 4-пространстве и продольным характером по отношению к волновому вектору, как в пространственной части континуума (3-пространстве), так и в пространственно временном континууме (4-пространство Минковского). Такая ситуация следует из условия удовлетворения спектральных составляющих волновому уравнению вида (1) и дополнительному условию продольности (1g), которое, будучи применено к каждой спектральной составляющей, имеет вид $a_i/k_i = a_0/\omega_0$.

Спектральные составляющие вихревой части вектора-потенциала электромагнитного поля в общем случае характеризуются произвольным направлением пространственной части вектора-потенциала относительно направления волнового вектора. Однако можно показать [4] , что в произвольной фиксированной системе координат спектральные составляющие вихревого вектора-потенциала раскладываются на продольную и поперечную части, удовлетворяющие волновому уравнению (1).

Отметим, что главную роль в вихревом ЭМП играет поперечная часть спектральных составляющих вектора-потенциала, поскольку в произвольной фиксированной системе координат действие, вектор энергии-импульса и тензор спинмомента фотонного цуга зависят лишь от поперечных частей спектральных составляющих вектора-потенциала [4]. Данную особенность фотона в КЭД принято называть калибровочной инвариантностью его волновой функции. Поскольку вариации продольных составляющих вектора-потенциала однозначно связаны с добавлением к исходному вихревому вектору-потенциалу некоторой градиентной составляющей названного потенциала, то рассматриваемое свойство называют также градиентной инвариантностью ВФФ.

В рассматриваемом варианте ВФФ калибровочная и градиентная инвариантность имеет более ограниченное применение, чем принято считать в КЭД. Рассматриваемое свойство применимо к действию, вектору энергии-импульса и тензору спинмомента, но не применимо к тензорам плотности указанных показателей и тензорам поляризации фотона. Тем не менее, при единственной спектральной составляющей вектора-потенциала $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \cdot \exp(i\omega\mathrm{t} - ikz)$ все динамические показатели фотона и показатели их плотности за исключением тензора поляризации характеризуются калибровочной инвариантностью [4].

В заключение данного подраздела напомним, что использование градиентной и калибровочной инвариантности ВФФ и некоторых показателей фотона удобно для упрощения ряда расчетных выражений. Однако использование названных приемов недопустимо при строгом теоретическом анализе показателей фотона ввиду нарушения принципа релятивистской инвариантности.

Обсудим далее особенности вычисляемых по новым формулам динамических показателей, и их отличие от показателей, вычисляемых по формулам классической электродинамики. Многие отличия здесь вызваны тем фактором, что при квантомеханическом подходе рассматривается пространственно ограниченный волновой пакет ЭМП (фотонный цуг) и его показатели, в то время как при классическом подходе рассматривается произвольное электромагнитное поле. Важное отличие заключается в том, что при квантомеханическом подходе появляется новый показатель волнового ЭМП - вектор плотности-потока действия ЭМП (2), который с точностью до постоянного коэффициента совпадает с вектором плотности-потока вероятности обнаружения фотона.

Указанный выше канонический тензор энергии-импульса (3) заметно отличается от классического тензора энергии импульса волнового ЭМП. Так, в случае монохроматической линейно поляризованной волны, он, будучи пропорциональным квадрату амплитуды вектора-потенциала, монотонно изменяется в пространстве и времени, представляя собой усредненное на длине волны значение плотности энергии и импульса классического поля. В классической же электродинамике в случае линейно поляризованной волны плотность энергии и импульса пульсируют во времени и пространстве с удвоенной частотой электромагнитного излучения. Кроме того, канонический тензор энергии-импульса содержит лишь составляющие импульсов, связанные с поступательным движением волнового пакета, и не содержит составляющих, связанных с неоднородным распределением спинового момента волнового цуга фотона.

При квантовом подходе рассматривается новая величина - тензор спинового момента фотона, который, будучи отличным от нуля, например при круговой поляризации электромагнитной (ЭМ) волны, монотонно распределен по всему объему волнового цуга с ограниченным поперечником. При классическом же рассмотрении локализованного волнового ЭМП равный по величине собственный момент волнового пакета создается периферийными составляющими импульса, направленными поперек движения волнового цуга.

В числе новых показателей фотона получен тензор плотности поляризации фотона (5) и симметричный тензор второго ранга поляризации фотонного цуга (10). В классической электродинамике поляризация определяется направлением вектора напряженности электрического поля ЭМ волны. Однако классическое определение поляризации ЭМ волн не является достаточно полным и релятивистки инвариантным. Оно пригодно лишь в случае линейно поляризованного волнового ЭМП.

Рассмотрим некоторые частные случаи поляризованных ЭМ волн. Пусть цуг представляет линейно поляризованную волну примерно постоянной частоты, при этом вектор-потенциал представлен одной компонентой A_1. Тензор поляризации имеет также одну, отличную от нуля компоненту Π_{11}. В этом случае мы имеем дело с одноосным симметричным тензором, характеристическая ось которого направлена вдоль направления вектора-потенциала. Эта особенность справедлива при любом направлении вектора-потенциала линейно поляризованной ЭМ волны.

При эллиптической поляризации плоской монохроматической волны тензор поляризации будет двухосным. При этом направления его характеристических осей совпадают с направлениями большой и малой диагонали эллипса, описываемого конечной точкой изменяющегося во времени вектора-потенциала. В частном случае круговой поляризации характеристический эллипс превращается в окружность, и двухосный тензор поляризации характеризуется равными осями.

В случае осесимметричного расходящегося пучка ЭМ волн с эллиптической поляризацией, тензор поляризации будет трехосным, а в общем случае 4-осным, причем значения его компонент дают информацию о степени поляризации цуга в любом координатном направлении.

Остановимся на вопросе квантования волновой функции фотона. Квантование волновой функции на некоторое число N фотонов производится с использованием формулы (7) при значении действия $J = \mathrm{N} \cdot \hbar$.

Отметим, что ВФФ не обязательно квантуется на целое число фотонов, то есть она может быть неквантованной. Такая ситуация имеет место при рассмотрении "классического" волнового поля, излучаемого антенной или импульсным лазером, то есть в тех случаях, когда излучение ЭМ волн производится за счет непрерывного коллективного движения множества электронов при непрерывном излучении волн в течение отрезка времени произвольной длительности. Другой случай проявления не квантованных волн является следствием "вырезания" части квантованного ЭМ цуга электронным затвором. В стандартной интерпретации квантовых явлений в рассматриваемых случаях говорится о ЭМ волновом пакете с неопределенным числом фотонов.

ЭМ излучение всегда квантовано при испускании фотонов в результате некоторого квантового процесса, например при переходе электрона из одного в другое квантовое состояние, или при образовании новой частицы с испусканием кванта излучения. ЭМ излучение также всегда квантовано внутри замкнутой полости при некоторой постоянной температуре. Такая ситуация - результат взаимодействия ЭМ излучения со стенками указанной полости, которое характеризуется изменением состояний электронов в атомной решетке полости.

Принято считать, что спин фотона всегда имеет одно из двух значений +1 или -1 в единицах $\hbar$. Однако мы будем считать правомерными квантованные состояния волнового ЭМП с круговой, эллиптической или линейной поляризацией, при которых спиновый момент квантованного волнового пакета может принимать непрерывный ряд значений от -1 до +1. В стандартной же интерпретации квантовых явлений состояния фотона со значением модуля спина, меньшим 1, принято называть состояниями с неопределенным спином.

Подводя итог сравнительного анализа описания волнового ЭМ поля классическим и квантовым методами, отметим более точное описание распределенных показателей поля классическим методом и более простое, но достаточно полное описание показателей волнового (фотонного) цуга ЭМП квантовым способом. Квантовое описание оправдано тем обстоятельством, что ввиду большого количества колебательных циклов, отвечающих одному кванту действия волнового поля, не требуется детального описания динамических показателей цуга в пределах одного периода колебаний. Достаточно иметь информацию об усредненных в пространстве и времени показателях волновых цугов, в частности информацию о распределении квантового действия и вероятности обнаружения фотона в области волнового цуга. В то же время непосредственно волновая функция содержит детальную информацию о фазовых показателях ЭМ поля в пределах цуга. При решении вопросов квантовой теории необходимо использование квантового описания волновых цугов ЭМП. Это связано с тем обстоятельством, что предлагаемый квантовый метод описания ЭМ поля согласуется с принятым методом описания всех микрообъектов.

Что касается операторов динамических показателей фотона, то они, будучи непригодны для описания локальных динамических показателей ЭМ волнового пакета, дают заметное упрощение вычислений динамических показателей волнового цуга, рассматриваемого как некоторый квантовый объект.

Выводы

1. Вопреки принятому мнению возможно введение волновой функции фотона в координатном представлении на основе вектора-потенциала ЭМ поля, обеспечивающей его корректное описание.

2. При квантовом описании волнового цуга ЭМП возможно введение нового тензора поляризации фотона, дающего более полную информацию о рассматриваемом показателе, чем принятый вектор поляризации ЭМ волны.

Литература:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том IV, М. «Наука», 1980, 704 с.
2. Википедия – Фотон. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D4%EE%F2%EE%ED
3. Львов О.С. Волновая природа микромира. НТБ SciTecLibrary URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/10670.html
4. Львов О.С. Волновая функция фотона в координатном преставлении. НТБ SciTecLibrary. URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/10646.html