ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Анализ известных тензоров энергии импульса электромагнитного поля в однородной изотропной среде

Львов Олег Сергеевич

Производится анализ известных тензоров энергии импульса (ТЭИ) электромагнитного поля (ЭМП) в однородных изотропных средах, в частности ТЭИ Минковского, ТЭИ Абрагама и вновь введенного ТЭИ, описанного в источнике [1]. Определяются области применения указанных ТЭИ путем рассмотрения сохранения импульса ЭМП и особенностей поведения ЭМП на границе двух сред.

Введение

Как указывалось в предыдущей статье автора [1] в Сборнике докладов ЕНО №4 (50), 2019, в технической литературе на протяжении длительного времени ведутся дебаты о виде ТЭИ ЭМП в сплошной диэлектрической среде. При этом, как правило, во внимание принимаются два основных варианта ТЭИ, полученных Г.Минковским и М.Абрагамом в начале прошлого века [2]. Теперь же автор намерен подробнее рассмотреть вопрос о ТЭИ ЭМП в изотропной среде, а также провести сравнительный анализ свойств известных ТЭИ, включая новый тензор [1] и, в частности, рассмотреть вопрос получения тензора напряжений для ТЭИ [1] непосредственно из уравнений Максвелла.

Кратко остановимся на проблемах, связанных с использованием указанных тензоров.

Тензор Минковского получен при использовании упрощенной вариационной методики на основе лагранжиана $\mathcal{L} = \frac{1}{4} H_{kl}\, F^{kl} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{HB} - \boldsymbol{ED})$. ТЭИ Минковского в релятивистской форме имеет вид $T^{ij} = H^i_k\, F^{kj} + \frac{g^{ij}}{4} H_{kl}\, F^{kl}$. В нерелятивистской форма ТЭИ Минковского записывается следующем образом:

$$T^{00} = (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2\,,\ T^{\alpha 0} = [\mathbf{EH}]^{\alpha},\ T^{0\alpha} = [\mathbf{DB}]^{\alpha}, \tag{1a}$$

$$T^{\alpha\beta} = -E^{\alpha}D^{\beta} - H^{\alpha}B^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2\,. \tag{1b}$$

ТЭИ Минковского обеспечивает сохранение энергии и импульса ЭМП, он релятивистски-инвариантен, то есть применим к движущимся средам Но поскольку указанный тензор, не будучи симметричным полным ТЭИ ЭМП, не дает правильных значений всех его импульсно-энергетических характеристик в среде, он редко упоминается в серьезной литературе (монографиях и учебных пособиях), и мы не будем заниматься его детальным анализом.

Тензор Абрагама симметричен, однако он не обладает релятивистской инвариантностью, и, обеспечивая сохранение энергии свободного ЭМП, он не обеспечивает сохранение его импульса даже в случае изотропной неподвижной среды. Несохранение импульса ЭМП связывают с наличием некоторой силы (силы Абрагама), проявляющейся в механическом воздействии ЭМП на среду. В литературе можно видеть попытки оправдания правомерности силы Абрагама, а также сообщения об экспериментальном подтверждении ее существования, однако корректность таких экспериментов вызывает сомнения.

Напомним уравнения Максвелла для однородной изотропной среды:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{c\partial t},\ \ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,,\ \ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{c\partial t} + \boldsymbol{j},\ \ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho\,. \tag{2}$$

Система единиц здесь выбрана из условия минимизации уравнений ЭМП.

В случае свободного поля уравнения Максвелла несколько упрощаются:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{c\partial t}, \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0\,, \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{c\partial t}, \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0\,. \tag{3}$$

В этом случае решения уравнений Максвелла сводятся к совокупности монохроматических плоских волн вида $\varepsilon|\boldsymbol{E_k}| = \mu|\boldsymbol{H_k}| = C_{\boldsymbol{k}}\sin(\omega t - \boldsymbol{kx} - \varphi_{\boldsymbol{k}})$, существующих в некотором спектре волновых векторов $\boldsymbol{k}$ ($|\boldsymbol{k}| = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$) и распространяющихся со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ в направлении волнового вектора. При этом пространственные векторы $\boldsymbol{E_k}, \boldsymbol{H_k}$, и $\boldsymbol{k}$ взаимно ортогональны.

В случае статических ЭМП уравнения Максвелла для изотропной среды принимают еще более простой вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}, \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{4a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}\ /\ \mu = \ j\,,\ \ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho\,. \tag{4b}$$

В этом случае поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ - потенциальные, а поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ - вихревые.

Тензор энергии импульса ЭМП Абрагама

Обратимся далее к ТЭИ Абрагама. В общем случае он имеет вид

$$T^{00} = (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2\,, \tag{5a}$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^{\alpha}, \tag{5b}$$

$$T^{\alpha\beta} = [-(E^{\alpha}D^{\beta} + E^{\beta}D^{\alpha} + H^{\alpha}B^{\beta} + H^{\beta}B^{\alpha}) + \delta^{\alpha\beta}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,]/2, \tag{5c}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. В случае изотропной среды $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и уравнения можно записать в более простой форме

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$T^{00} = (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/2, \tag{6a}$$
$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})^{\alpha}, \tag{6b}$$
$$T^{\alpha\beta} = -\varepsilon\, E^{\alpha}E^{\beta} - \mu\, H^{\alpha}H^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/2. \tag{6c}$$

Энергия ЭМ поля, как показано в многочисленных источниках [3, 4], в случае тензора Абрагама сохраняется. Поэтому остановимся на вопросе сохранения импульса ЭМП, плотность которого отвечает выражению $T^{\alpha 0}$. С этой целью вычислим истоки плотности импульса $\partial T^{\alpha k}/\partial x^k$.

Без потери общности определим величину истоков плотности импульса T^{1}º. Для этого нам понадобятся следующие компоненты ТЭИ:

$$T^{10} = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})^1 = E^2H^3 - E^3H^2,$$
$$T^{11} = [({E^2}^2 + {E^3}^2 - {E^1}^2)/\mu + ({H^2}^2 + {H^3}^2 - {H^1}^2)/\varepsilon]/2,$$
$$T^{12} = -E^1E^2/\mu - H^1H^2/\varepsilon,\; T^{13} = -E^1E^3/\mu - H^1H^3/\varepsilon. \tag{7}$$

Вычисляя плотность истоков данной компоненты импульса $\partial T^{1k}/\partial x^k$ и группируя члены с общими множителями, получаем следующее выражение:

$$\begin{gathered}\partial T^{10}_{,0} + \partial T^{11}_{,1} + \partial T^{12}_{,2} + \partial T^{13}_{,3} = \\ -\varepsilon\, E^1(\partial E^1_{,1} + \partial E^2_{,2} + \partial E^3_{,3}) - \mu\, H^1(\partial H^1_{,1} + \partial H^2_{,2} + \partial H^3_{,3}) + \\ E^2[\partial H^3_{,0} + \varepsilon(\partial E^2_{,1} - \partial E^1_{,2})] + E^3[-\partial H^2_{,0} - \varepsilon(\partial E^1_{,3} - \partial E^3_{,1})] + \\ H^2[-\partial E^3_{,0} + \mu(\partial H^2_{,1} - \partial H^1_{,2})] + H^3[\partial E^2_{,0} - \mu(\partial H^1_{,3} - \partial H^3_{,1})].\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $x^0 = ct$.

Первая строка результата равна нулю ввиду равенства нулю дивергенции электрического поля (первая сумма в скобках) и магнитного поля (вторая сумма в скобках) в силу уравнений (3). Однако вторая и третья строки результата не равны нулю. С целью анализа выпишем содержимое первой квадратной скобки во второй строке результата, и несколько преобразуем это выражение:

$$\partial H^3_{,0} + \varepsilon(\partial E^2_{,1} - \partial E^1_{,2}) = \frac{\partial H^3}{c\partial t} + \varepsilon(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})^3 = \frac{\partial H^3}{c\partial t} - \varepsilon\frac{\partial B^3}{c\partial t} = -\frac{\partial H^3}{c\partial t}(\varepsilon\mu - 1).$$

Подобным же образом преобразуем содержимое первой квадратной скобки в третьей строке результата

$$-\partial E^3_{,0} + \mu(\partial H^2_{,1} - \partial H^1_{,2}) = -\frac{\partial E^3}{c\partial t} + \mu(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^3 = -\frac{\partial E^3}{c\partial t} + \mu\frac{\partial D^3}{c\partial t} = \frac{\partial E^3}{c\partial t}(\varepsilon\mu - 1).$$

Преобразуя подобным образом остальные выражения во второй и третьей строках результата, получим окончательно

$$\begin{gathered}\partial T^{10}_{,0} + \partial T^{11}_{,1} + \partial T^{12}_{,2} + \partial T^{13}_{,3} = \\ \left(-E^3\frac{\partial H^2}{c\partial t} - E^2\frac{\partial H^3}{c\partial t} + H^2\frac{\partial E^3}{c\partial t} + H^3\frac{\partial E^2}{c\partial t}\right)(\varepsilon\mu - 1) = -(\varepsilon\mu - 1)\frac{\partial}{c\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^1.\end{gathered} \tag{9}$$

Аналогичным способом, заменой индекса 1 на 2 или 3, могут быть получены истоки 2-й и 3-й компонент плотности импульса. Таким образом, плотность истоков компонент импульса в случае свободного ЭМП отлична от нуля.

Величину $\boldsymbol{f} = (\varepsilon\mu - 1)\frac{\partial}{c\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$, которая имеет размерность плотности силы, называют силой Абрагама, см. [3], форм. (75.18). В силу ненулевых истоков импульса, тензор Абрагама не пригоден для описания свободного ЭМП.

В случае статического связанного ЭМП все временные производные равны нулю, и в силу нулевого значения выражения (9) равны нулю истоки проекций импульсов ЭМП. Таким образом импульсы ЭМП в случае статических полей сохраняются, и ТЭИ Абрагама справедлив. Такая ситуация связана с получением тензора Абрагама на основе статических законов электродинамики.

Отметим, что в последнем рассматриваемом случае ТЭИ Абрагама справедлив и в области отличных от нуля значений плотности зарядов и токов, которые взаимодействуя с ЭМП казалось бы должны изменять величину его импульса. Однако возникающие при этом силы Кулона-Лоренца в случае статических полей компенсируются силами иного происхождения.

Новый тензор энергии-импульса ЭМП, описанный в [1]

В апрельском номере 2019г Сборника докладов ЕНО путем анализа моделей свободного ЭМП в вакууме и однородной изотропной среде, характеризующихся определенным подобием, автором были опубликованы формулы для нового ТЭИ. Было показано, что предложенный ТЭИ обеспечивает сохранение энергии и импульса свободного ЭМП. Указанный тензор, отличаясь от ТЭИ Абрагама лишь своей пространственной частью, имеет следующий вид:

$$T^{00} = (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)/2, \tag{10a}$$
$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})^{\alpha}, \tag{10b}$$
$$T^{\alpha\beta} = [-E^{\alpha}E^{\beta}/\mu - H^{\alpha}H^{\beta}/\varepsilon + \delta^{\alpha\beta}(\mathbf{E}^2/\mu + \mathbf{H}^2/\varepsilon)/2]. \tag{10c}$$

Опишем далее вариант получения тензора напряжений $T^{\alpha\beta}$ (10c) непосредственно из уравнений Максвелла для свободного поля в однородной изотропной среде, воспользовавшись некоторыми выкладками из источника [4, с.31]. С этой целью используем тождественное соотношение

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$[(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\times\boldsymbol{D}]_\alpha=\frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\gamma}D_\gamma-\frac{\partial E_\gamma}{\partial x^\alpha}D_\gamma=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(E_\alpha D_\gamma-\delta_{\alpha\gamma}\mathbf{ED})+\delta_{\alpha\gamma}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x^\gamma}-E_\alpha\mathrm{div}\mathbf{D}. \quad (11)$$

Используя выражение (11), а также тождество $\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x^\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\mathbf{ED})$ и уравнение Максвелла (3) $\mathrm{div}\mathbf{D}=0$, получим:

$$[(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})\times\boldsymbol{D}]_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(E_\alpha D_\gamma-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\mathbf{ED}). \quad (12)$$

Выполнив аналогичные преобразования для компонент напряженности и индукции магнитного поля H и B, получим новое соотношение, подобное (12):

$$[(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})\times\mathbf{B}]_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(H_\alpha B_\gamma-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}\mathbf{HB}). \quad (13)$$

Образуем далее векторные произведения, умножив справа обе стороны уравнения Максвелла (3-1) на вектор D, а уравнения (3-3) на вектор B. Сложение полученных результатов приводит, с учетом (12) и (13), к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(E_\alpha D_\gamma+H_\alpha B_\gamma-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB}))=\frac{\partial}{\partial x^0}[\mathbf{D}\times\mathbf{B}]_\alpha. \quad (14)$$

После деления обеих частей (14) на величину $\varepsilon\mu$ получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(E_\alpha E_\gamma/\mu+H_\alpha H_\gamma/\varepsilon-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{E}^2/\mu+\mathbf{H}^2/\varepsilon))=-\frac{\partial}{\partial x^\gamma}T_{\alpha\gamma}=\frac{\partial}{\partial x^0}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_\alpha. \quad (15)$$

Поскольку член в правой части равенства представляет собой изменение плотности импульса ЭМП $T_{\alpha 0}$ во времени $(x^0=ct)$, то его левая часть может интерпретироваться как свертка по индексу $\gamma=1,2,3$ тензора напряжений ЭМП - $T_{\alpha\gamma}$. То есть тензор напряжения ЭМП должен отвечать выражению

$$T_{\alpha\gamma}=-E_\alpha E_\gamma/\mu-H_\alpha H_\gamma/\varepsilon+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{E}^2/\mu+\mathbf{H}^2/\varepsilon), \quad (16)$$

которое совпадает с выражением (10c), полученным ранее иным методом.

Возникает вопрос, почему авторы [4] не сумели получить правильного выражения для пространственной части ТЭИ ЭМП? Ошибка здесь кроется в неверном истолковании величины $[\mathbf{D}\times\mathbf{B}]$ в качестве плотности импульса ЭМП.

Приведем далее доказательство сохранения импульса ЭМП рассматриваемого ТЭИ для случая свободного ЭМП, повторив выкладки из Приложения в [1], которые сводятся к проверке справедливости выражения $\partial T^{\alpha k}/\partial x^k=0$.

Без потери общности полагаем $\alpha=1$. При этом интересующие нас компоненты ТЭИ (10) имеют вид

$$T^{10}=(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^1=E^2H^3-E^3H^2,$$

$$T^{11}=[({E^2}^2+{E^3}^2-{E^1}^2)/\mu+({H^2}^2+{H^3}^2-{H^1}^2)/\varepsilon]/2,$$

$$T^{12}=-E^1E^2/\mu-H^1H^2/\varepsilon,\ T^{13}=-E^1E^3/\mu-H^1H^3/\varepsilon.$$

Вычисляя плотность истоков данной компоненты импульса $\partial T^{1k}/\partial x^k$ и группируя члены с общими множителями, получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered}\partial T^{10}_{,0}+\partial T^{11}_{,1}+\partial T^{12}_{,2}+\partial T^{13}_{,3}=\\ -E^1(\partial E^1_{,1}+\partial E^2_{,2}+\partial E^3_{,3})/\mu-H^1(\partial H^1_{,1}+\partial H^2_{,2}+\partial H^3_{,3})/\varepsilon+\\ E^2[\partial H^3_{,0}+(\partial E^2_{,1}-\partial E^1_{,2})/\mu]+E^3[-\partial H^2_{,0}-(\partial E^1_{,3}-\partial E^3_{,1})/\mu]+\\ H^2[-\partial E^3_{,0}+(\partial H^2_{,1}-\partial H^1_{,2})/\varepsilon]+H^3[\partial E^2_{,0}-(\partial H^1_{,3}-\partial H^3_{,1})/\varepsilon].\end{gathered} \quad (17)$$

Первая строка результата равна нулю ввиду равенства нулю дивергенций электрического поля (первая сумма в скобках) и магнитного поля (вторая сумма в скобках) в силу уравнений Максвелла (3). Вторая строка результата равна нулю ввиду того, что выражения в квадратных скобках в первом и втором членах сводятся к выражениям вида $[\partial B^3_{,0}+(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})^3]/\mu$ и $[-\partial B^2_{,0}-(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})^2]/\mu$, которые равны нулю в силу первого уравнения Максвелла для изотропной среды - (3). Наконец, выражения в квадратных скобках последней строки результата сводятся к выражениям $[-\partial D^3_{,0}+(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^3]/\varepsilon$ и $[\partial D^2_{,0}-(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2]/\varepsilon$, которые равны нулю в силу третьего уравнения Максвелла для изотропной среды (3).

Формально приведенное доказательство справедливо как для случая свободного ЭМП, так и для случая переменного или статического связанного ЭМП в области, свободной от электрических зарядов и токов. Однако памятуя, что тензор напряжений ЭМП (10c, 16) получен для свободного ЭМП, мы не будем утверждать о правомерности ТЭИ [1] в двух последних случаях.

Проверка корректности ТЭИ ЭМП на границе раздела двух сред

Для дополнительной проверки правильности вышеприведенных ТЭИ (5) и (10) рассмотрим прохождение импульса ЭМП через границу двух сред 1 и 2.

Согласно ТЭИ ЭМП Абрагама и ТЭИ [1] плотность энергии ЭМ волны

$\mathrm{W}=(\varepsilon\,\mathrm{E}^2+\mu\,\mathrm{H}^2)/2$, причем для исходной волны $\mathrm{W0}=(\varepsilon 1\,\mathrm{E0}^2+\mu 1\,\mathrm{H0}^2)/2$.

Поскольку в ЭМ волне мощности электрического поля и магнитного поля равны, то для ЭМ плоской волны можем записать

$\varepsilon\,\mathrm{E}^2=\mu\,H^2$ и $H^2=\varepsilon/\mu\,\mathrm{E}^2$ или $H=\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\mathrm{E}$ и $\mathrm{W}=\varepsilon\,\mathrm{E}^2=\mu\,H^2$.

При этом плотность импульса ЭМ волны можно записать в следующем виде:

$\mathrm{S}=\mathrm{E}\times H=(\varepsilon/\mu)\,E^2=\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H^2=\mathrm{W}/\sqrt{\varepsilon\mu}=\mathrm{W}/n$, где n – коэффициент преломления среды.

Вместо напряженностей полей удобно все показатели импульсов выражать через их мощности, и в конечном итоге через мощность исходной волны W0.

Формулы для мощности отраженной волны W1 и проходящей – W2:

$W1 = (n2 - n1)^2/(n2 + n1)^2\, W0\,, W2 = 4\,n2\,n1/(n2 + n1)^2\, W0.$

Формулы для напряженностей основной, отраженной и проходящей волн:

$$E0^2 = W0\,/\,\varepsilon 1, E0 = \sqrt{W0/\varepsilon 1}, H0^2 = W0/\mu 1, H0 = \sqrt{W0/\,\mu 1},$$
$$E1^2 = W1/\,\varepsilon 1 = (n2 - n1)^2\,/\,(n2 + n1)^2\, W0\,/\,\varepsilon 1,$$
$$E1 = -\,(n2 - n1)/(n2 + n1)\,\sqrt{W0/\varepsilon 1},$$
$$H1^2 = W1/\,\mu 1 = (n2 - n1)^2/(n2 + n1)^2\, W0\,/\,\mu 1\,,$$
$$H1 = (n2 - n1)/(n2 + n1)\,\sqrt{W0/\mu 1}\,,$$
$$E2^2 = W2\,/\,\varepsilon 2 = 4\,n2\,n1/(n2 + n1)^2\, W0/\varepsilon 2,$$
$$H2^2 = 4\,n1\,n2/(n2 + n1)^2\, W0/\mu 2. \qquad (18)$$

Формулы для полных Е- и Н-напряженностей Е01 и Н01 в среде 1:

$$E01 = E0 + E1 = [1 - (n2 - n1)/(n2 + n1)]\,\sqrt{W0/\varepsilon 1} =$$
$$2n1/(n2 + n1)\,\sqrt{W0/\varepsilon 1}\,, E01^2 = 4\,n1^2\,/\,(n2 + n1)^2\, W0/\varepsilon 1,$$
$$H01 = H0 + H1 = [1 + (n2 - n1)/(n2 + n1)]\,\sqrt{W0/\mu 1} =$$
$$2\,n2/(n2 + n1)\,\sqrt{W0/\mu 1}, H01^2 = 4\,n2^2\,/\,(n2 + n1)^2\, W0\,/\,\mu 1. \qquad (19)$$

Плотность силы, действующей на границу сред, может быть определена двумя способами.

Во-первых, она равна сумме производных по времени от плотностей набегающих и проходящих через границу импульсов. При этом исходный и отраженный импульсы берутся со знаком плюс, а проходящий импульс со знаком минус. Производная импульса по времени определяется делением величины импульса на время прохождения волной единичного объема, которое обратно пропорционально относительной скорости волны, $\beta 1 = 1/n1$ и $\beta 2 = 1/n2$. Второй способ определения плотности силы на границе сводится к вычислению разности напряжений ЭМ поля слева и справа от границы. $Fгр = T1^{11} - T2^{11}$.

Определим мощности рассматриваемых импульсов:

$$S0 = W0\,/\,n1, S1 = W1\,/\,n1 = (n2 - n1)^2\,/\,(n2 + n1)^2\, W0\,/\,n1,$$
$$S2 = W2\,/\,n2 = 4\,n2\,n1\,/\,(n2 + n1)^2\, W0\,/\,n2. \qquad (20)$$

Деля мощности импульсов S на соответствующие скорости волн, суммируя получаемые силы и выполняя простые преобразования, определяем результирующую плотность силы на границе:

$$Fгр = [1/n1^2 + (n2 - n1)^2/(n2 + n1)^2/n1^2 - 4n1\,n2/(n2 + n1)^2/n2^2]W0 =$$
$$[\,2\,(n2^2 + n1^2)\,/\,n1^2 - 4\,n1\,n2\,/\,n2^2]\,/\,(n2 + n1)^2\, W0 =$$
$$2\,[\,(n2^2 + n1^2)\,/\,n1^2 - 2\,n1/\,n2]\,/\,(n2 + n1)^2\, W0. \qquad (21)$$

Далее определим плотность силы через разность напряжений слева и справа границы, используя полученные значения напряженностей ЭМП (18, 19):

$$Fгр = T1^{11} - T2^{11} = (E01^2\,/\,\mu 1 + H01^2/\,\varepsilon 1 - E2^2/\mu 2 - H2^2/\varepsilon 2)\,/\,2 =$$
$$[\,2\,/\,(n2 + n1)^2 + 2\,n2^2\,/\,(n2 + n1)^2\,/\,n1^2 -$$
$$2\,n1/(n2 + n1)^2/\,n2 - 2\,n1/(n2 + n1)^2/n2\,]\, W0 =$$
$$2\,[\,(n1^2 + n2^2)/\,n1^2 - 2\,n1/n2]/\,(n2 + n1)^2\, W0\,. \qquad (22)$$

Результаты проверки плотности силы (21) и (22), вычисленной двумя способами, для ТЭИ [1] показали их совпадение.

В случае ТЭИ Абрагама сила на границе сред определяется выражением

$$Fгр = T1^{11} - T2^{11} = (\varepsilon 1\, E01^2 + \mu 1\, H01^2 - \varepsilon 2\, E2^2 - \mu 2\, H2^2)\,/\,2 =$$
$$[2\,n1^2/(n2 + n1)^2 + 2\,n2^2\,/\,(n2 + n1)^2 - 4\,n1\,n2/(n2 + n1)^2\,]\, W0 =$$
$$2\,(n2 - n1)^2/(n2 + n1)^2\, W0. \qquad (23)$$

Результаты проверки плотности силы (21) и (23), вычисленной двумя способами, для ТЭИ Абрагама показали их несовпадение.

Таким образом, полученные результаты вновь подтверждают корректность ТЭИ [1] и некорректность ТЭИ Абрагама в случае свободного ЭМП.

Остановимся далее на вопросе описания различными ТЭИ силовых показателей статических ЭМП на границе раздела двух сред. Известно, что на границе двух сред с различающимися значениями ε и μ сохраняются нормальные составляющие индукции электрического и магнитного полей **D** и **B**, в то время как соответствующие значения их напряженностей изменяются в соответствии с соотношениями $E1/E2 = \varepsilon 2/\varepsilon 1$ и $H1/H2 = \mu 2/\mu 1$. При этом соотношение электрических напряженностей не зависит от магнитных проницаемостей сред, а соотношение магнитных напряженностей не зависит от диэлектрических проницаемостей сред.

Анализируя выражения для тензора напряжений Абрагама (5с, 6с) и ТЭИ [1] - (10с), нетрудно понять, что тензор напряжений Абрагама удовлетворяет указанным условиям, в то время как тензор [1] противоречит этим условиям.

Данный результат подтверждает высказанное ранее предположение, что ТЭИ [1] пригоден лишь для описания свободных ЭМП.

Выводы

1. Ни один из рассмотренных ТЭИ ЭМП не обеспечивает правильного описания его импульсных и силовых характеристик для всевозможных видов ЭМП. При этом все тензоры дают верное описание плотности энергии поля.

2. ТЭИ Абрагама, правильно описывая импульсно-энергетические характеристики статических и медленно изменяющихся связанных полей, непригоден для описания свободного ЭМП.

3. ТЭИ [1] правильно описывая свободные ЭМП, непригоден для описания статических и связанных ЭМП.

4. Тензор Минковского, не являясь полным ТЭИ ЭМП, – единственный релятивистски-инвариантный тензор среди рассмотренных ТЭИ. На его основе можно ожидать получения полного релятивистски-инвариантного ТЭИ, пригодного для описания всевозможных ЭМП в различных средах.

Литература:

1. Львов О.С. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в однородной изотропной среде. Сборник статей конференции ЕНО, №4 (50), 2019.

2. Ю.А. Спиричев, О выборе тензора энергии-импульса в электродинамике и силе Абрагама, УФН, т.188, № 3, (2018), с.325-328.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М. «Наука», 1982, 621 с.

4. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А., Электродинамика. М. «Наука», 1978.