ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в однородной изотропной среде

Львов Олег Сергеевич
г. Пенза

Ввиду неоднозначного мнения специалистов относительно вида тензора энергии-импульса (ТЭИ) электромагнитного поля (ЭМП) в диэлектрической среде предлагается новый, отличающийся от принятых ТЭИ для однородной среды. При получении нового ТЭИ использовано подобие уравнений ЭМП в вакууме и однородной изотропной среде, которые различаются лишь значением скорости распространения электромагнитных волн. В отличие от известного тензора Абрагама новый тензор обеспечивает сохранение импульса ЭМП в однородной среде.

Введение

Удивительно, но спустя более 100 лет после публикации первых выражений для тензора энергии-импульса электромагнитного поля в изотропных однородных диэлектрических средах в данном вопросе нет полной ясности [1, 2]. В литературе в основном рассматривается два варианта названного тензора: асимметричный тензор Минковского и симметричный тензор Абрагама. Однако первый из них не обеспечивает сохранения момента импульса ЭМП ввиду его асимметрии, а второй не удовлетворяет требованию сохранения импульса ЭМП. При этом отсутствие сохранения импульса в случае ТЭИ Абрагама связывается с наличием некоторой силы (сила Абрагама), возникающей при распространении ЭМП в среде.

По мнению же автора все проблемы связаны с неверным выбором ТЭИ ЭМП в изотропной однородной среде. При его правильном выборе импульс ЭМП в среде сохраняется, и отпадает необходимость введения силы взаимодействия ЭМП со средой, связанной с несохранением импульса.

Поучение корректного ТЭИ для однородной среды

Справедливость выражения для ТЭИ ЭМП в вакууме [3]

$$T^{ik}_{(\text{в})} = -F^{ip}F^{k}_{p} + \frac{g^{ik}}{4}F^{qp}F_{qp}, \tag{1}$$

где F^{ip} – известный антисимметричный тензор напряженностей ЭМП

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, i, j = 0, 1, 2, 3, \tag{2}$$

не вызывает сомнений. Здесь E_i и H_i – компоненты электрического и магнитного полей.

Напомним также уравнения свободного ЭМП в изотропной среде [4]. Будучи записаны в нерелятивистской форме, они имеют вид

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{c\partial t}, \text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{c\partial t} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{c\partial t}, \tag{3a}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = \text{div}\,\mathbf{H} = 0, \text{div}\,\mathbf{D} = \text{div}\,\mathbf{E} = 0, \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \text{ и } \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{3b}$$

Что касается ТЭИ ЭМП в однородных изотропных диэлектрических средах, то здесь отдается предпочтение симметричному ТЭИ Абрагама [5], компоненты которого записываются в виде

$$T^{00} = (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2, \tag{4a}$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^{\alpha}, \tag{4b}$$

$$T^{\alpha\beta} = -E^{\alpha}D^{\beta} - H^{\alpha}B^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2, \text{где } \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{4c}$$

Как указывалось, тензор (4) нельзя признать удовлетворительным, поскольку обеспечивая сохранение энергии поля, он не обеспечивает сохранения его импульса, то есть $\partial T^{0k}/\partial x^k = 0$, однако $\partial T^{\alpha k}/\partial x^k \neq 0$.

Верный подход к решению проблемы нашли в 2010г М.Крейншаф и Т.Бендер [6, 7], приняв во внимание, что уравнения Максвелла для однородной среды подобны уравнениям для вакуума при рассмотрении в специальном 4-пространстве, где скорость распространения ЭМ волн $\tilde{c} = c/n = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, а временная координата $x^{\tilde{0}}$ имеет вид $x^{\tilde{0}} = ct/n = ct/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Указанный ими в [6, 7] ТЭИ диэлектрической среды записывается в виде

$$T^{00} = (n^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/2, \text{где } \mu = 1 \text{ и } \mathbf{B} = \mathbf{H}, \tag{5a}$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = n(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^{\alpha}, \tag{5b}$$

$$T^{\alpha\beta} = -n^2E^{\alpha}E^{\beta} - B^{\alpha}B^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(n^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/2. \tag{5c}$$

При этом имеет место сохранение энергии и импульса, поскольку $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$.

Однако, хотя авторы нашли правильный подход к определению ТЭИ ЭМП в изотропной среде, приведенные выше выражения (5) не являются верными. Являясь частным промежуточным результатом, они не приведены к окончательной правильной форме и неполны, поскольку здесь $\mu = 1$, тогда как в общем случае $\mu > 0$.

Далее приведем вывод формул для компонент ТЭИ ЭМП в изотропной непроводящей среде без дисперсии, исходя из положения об определенной идентичности уравнений Максвелла в вакууме и уравнений электромагнитного поля в среде при условии замены скорости света c на величину $\tilde{c} = c/n = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Заметим, что здесь и далее диакритическим знаком ~ отмечаются временные индексы векторов и тензоров нового 4-пространства. Этим же значком обозначаются новые показатели электромагнитного поля, рассматриваемого в окружающей диэлектрической среде. При этом временные компоненты $x^{\tilde{0}}, A^{\tilde{0}}, T^{\tilde{0}\tilde{0}}$ векторов нового 4-пространства связаны с компонентами x^0, A^0, T^{00} соотношениями $x^{\tilde{0}} = x^0/n$, $A^{\tilde{0}} = A^0/n$, $T^{\tilde{0}\tilde{0}} = T^{00}/n^2$.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Исходя из предположения об идентичности уравнений Максвелла в вакууме и новых уравнений ЭМП в среде будем рассматривать антисимметричный тензор напряженностей поля в среде $\tilde{F}^{ij}$ с пространственно-временными компонентами $\tilde{F}^{\tilde{0}\alpha} = \tilde{E}^{\alpha}$ и чисто пространственными компонентами $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\tilde{H}^{\gamma}$, где $\tilde{E}^{\alpha}$ и $\tilde{H}^{\gamma}$ компоненты некоторых новых векторов $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, а $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ единичный полностью антисимметричный тензор обычного 3-пространства.

В соответствии с нашим предположением тензор $\tilde{F}^{ij}$ отвечает соотношениям, характерным для вакуумного ЭМП

$$\frac{\partial\tilde{F}^{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial\tilde{F}^{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial\tilde{F}^{jk}}{\partial x^i} = 0 \text{ и } \frac{\partial\tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{7}$$

При этом в первом соотношении индексы i, j, k представляют собой любые 3 последовательных символа из круговой группы символов $\tilde{0}, 1, 2, 3$. Во втором соотношении индекс i может иметь любое из значений $\tilde{0}, 1, 2, 3$.

В нерелятивистской векторной форме уравнения (7) имеют вид

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{H}}}{\partial t}, \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{8a}$$

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{H}} = 0, \operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} = 0. \tag{8b}$$

Сравнивая уравнения (8a) с известными уравнениями ЭМП (3a) для диэлектрической среды можно видеть, что первые совпадают со вторыми, при

$$\tilde{\mathbf{E}} = k\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E} \text{ и } \tilde{\mathbf{H}} = k\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}. \tag{9}$$

Здесь связь между известными и новыми напряженностями ЭМП определяется с точностью до постоянного множителя k, который будет определен позднее.

Займемся далее определением корректного ТЭИ ЭМП. Исходя из вида ТЭИ вакуумного ЭМП (1), записываем в общем виде ТЭИ ЭМП в среде и далее более детально его характерные компоненты

$$T^{ik}_{(\text{ср})} = -\tilde{F}^{ip}\tilde{F}^{k}_{p} + \frac{g^{ik}}{4}\tilde{F}^{qp}\tilde{F}_{qp}\,, \tag{10}$$

$$T^{\tilde{0}\tilde{0}} = (\tilde{\mathbf{E}}^2 + \tilde{\mathbf{H}}^2)/2 = k^2(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)/2, \tag{10a}$$

$$T^{\tilde{0}\alpha} = T^{\alpha\tilde{0}} = [\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}]^{\alpha} = k^2\sqrt{\varepsilon\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^{\alpha}, \tag{10b}$$

$$T^{\alpha\beta} = -\tilde{E}^{\alpha}\tilde{E}^{\beta} - \tilde{H}^{\alpha}\tilde{H}^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\tilde{\mathbf{E}}^2 + \tilde{\mathbf{H}}^2)/2 = k^2[-\varepsilon\, E^{\alpha}E^{\beta} - \mu\, H^{\alpha}H^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)/2]\,. \tag{10c}$$

Переходя в соотношениях (10a, 10b) от индексов $\tilde{0}$ к обычным индексам 0, что отвечает замене координатной переменной $x^{\tilde{0}} = x^0/n$ на x^0, получим следующие выражения для компонент нового ТЭИ

$$T^{00} = k^2\varepsilon\mu\,(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)/2 = k^2\varepsilon\mu\,(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2, \tag{11a}$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = k^2\varepsilon\mu\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^{\alpha}, \tag{11b}$$

$$T^{\alpha\beta} = k^2[-\varepsilon\, E^{\alpha}E^{\beta} - \mu\, H^{\alpha}H^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)/2]\,. \tag{11c}$$

При этом выражение (11c) сохраняет прежний вид ввиду отсутствия индексов $\tilde{0}$ в исходном выражении (10c).

Сравнивая полученные значения компонент нового ТЭИ (11) с компонентами тензора Абрагама (4), и будучи убеждены в правильности компонент T^{00} и $T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$ тензора (4), поскольку последние подтверждаются многочисленными источниками по электродинамике сплошных сред [1, 3-5], определяем значение неизвестного множителя k. А именно $k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и $k^2 = 1/\varepsilon\mu$.

Таким образом окончательные выражения для компонент ТЭИ ЭМП в изотропной непроводящей среде отвечают соотношениям

$$T^{00} = (\mathbf{ED} + \mathbf{HB})/2, \tag{12a}$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})^{\alpha}, \tag{12b}$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon\mu}[-\varepsilon\, E^{\alpha}E^{\beta} - \mu\, H^{\alpha}H^{\beta} + \delta^{\alpha\beta}(\varepsilon\mathbf{E}^2 + \mu\mathbf{H}^2)/2] = [-E^{\alpha}E^{\beta}/\mu - H^{\alpha}H^{\beta}/\varepsilon + \delta^{\alpha\beta}(\mathbf{E}^2/\mu + \mathbf{H}^2/\varepsilon)/2]\,. \tag{12c}$$

Сохранение энергии и импульса ЭМП для ТЭИ (12) следует из методики его получения, подобной методике получения ТЭИ вакуумного ЭМП. Ниже в Приложении приведено непосредственное доказательство сохранения энергии и импульса ЭМП в среде, исходя из вида компонент тензора (12).

Следует объяснить неожиданный результат, касающийся вида компонент тензора напряжений-натяжений $T^{\alpha\beta}$ ЭМП в среде. На первый взгляд трудно понять, почему вклад в напряжения от электрического поля обратно пропорционален магнитной проницаемости среды μ, а вклад от магнитного поля обратно пропорционален диэлектрической проницаемости среды ε.

Для объяснения такой ситуации, например в случае напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, следует понять, что напряженность $\mathbf{E}$ в данном случае может быть представлена как результат наложения n пар одинаковых встречных волн ЭМП с единым направлением электрического поля $\mathbf{E}/(2n)$ и противоположными направлениями взаимно компенсирующихся поперечных магнитных полей. При этом напряжения в среде пропорциональны произведению плотности энергии полей на квадрат скорости их переноса [3, (33.5), (35.4)]. Но плотность энергии поля пропорциональна величине $\varepsilon\mathbf{E}^2$, а скорость переноса обратно пропорциональна величине $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Квадрат же указанной скорости обратно пропорционален величине $\varepsilon\mu$, что и приводит к зависимости напряжения в среде от квадрата напряженности поля $\mathbf{E}^2$, поделенной на μ. Аналогично можно показать обратную зависимость напряжения в среде от ε при наличии магнитного поля.

Отметим, что диагональный инвариант найденного тензора равен нулю, то есть $T^{\tilde{0}\tilde{0}} - T^{\alpha\alpha} = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ в случае базовых координат $x^{\tilde{0}} = x^0/n, x^1, x^2, x^3$ или $T^k_k = 0$ в случае произвольных координат, полученных непрерывным преобразованием базовых координат. Опускание индексов тензорных объектов нового 4-пространства производится с помощью метрического тензора g_{ik}, который в базовой системе отсчета имеет компоненты $g_{\tilde{0}\tilde{0}} = 1, g_{\alpha\alpha} = -1$. Суммирование по α здесь отсутствует.

В заключение отметим, что величины (12) не представляют собой компоненты релятивистки инвариантного ТЭИ. Они справедливы только для случая неподвижной среды.

Отметим также, что указанная запись ТЭИ ЭМП и его компонент для сплошной среды в нерелятивистской форме не отвергает возможности их записи в релятивистской форме. Определение ТЭИ ЭМП в изотропной или анизотропной среде в релятивисткой форме является очередной, пока не решенной задачей электродинамики.

Приложение

Покажем справедливость наших утверждений о сохранении импульса, отвечающего новому тензору (12).

Предварительно заметим, что сохранение энергии поля, отвечающей рассматриваемому тензору, который характеризуется одинаковыми значениями компонент T^{00} и $T^{\alpha 0}$ с тензором Абрагама, приведено в источнике [4], стр.360.

Далее покажем справедливость выражения $\partial T^{\alpha k}/\partial x^k = 0$ для нового ТЭИ.

Без потери общности полагаем $\alpha = 1$. При этом интересующие нас компоненты ТЭИ (12) имеют вид

$$T^{10} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^1 = E^2 H^3 - E^3 H^2,$$

$$T^{11} = [(E^{2^2} + E^{3^2} - E^{1^2})/\mu + (H^{2^2} + H^{3^2} - H^{1^2})/\varepsilon]/2,$$

$$T^{12} = -E^1 E^2/\mu - H^1 H^2/\varepsilon\,,\ T^{13} = -E^1 E^3/\mu - H^1 H^3/\varepsilon.$$

Вычисляя плотность истоков данной компоненты импульса $\partial T^{1k}/\partial x^k$ и группируя члены с общими множителями, получаем следующие выражения

$$\begin{gathered}\partial T^{10}_{,0} + \partial T^{11}_{,1} + \partial T^{12}_{,2} + \partial T^{13}_{,3} = \\ -E^1(\partial E^1_{,1} + \partial E^2_{,2} + \partial E^3_{,3})/\mu - H^1(\partial H^1_{,1} + \partial H^2_{,2} + \partial H^3_{,3})/\varepsilon + \\ E^2[\partial H^3_{,0} + (\partial E^2_{,1} - \partial E^1_{,2})/\mu] + E^3[-\partial H^2_{,0} - (\partial E^1_{,3} - \partial E^3_{,1})/\mu] + \\ H^2[-\partial E^3_{,0} + (\partial H^2_{,1} - \partial H^1_{,2})/\varepsilon] + H^3[\partial E^2_{,0} - (\partial H^1_{,3} - \partial H^3_{,1})/\varepsilon]\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Первая строка результата равна нулю ввиду равенства нулю дивергенции электрического поля (первая сумма в скобках) и магнитного поля (вторая сумма в скобках) в силу уравнений Максвелла ($3b$). Вторая строка результата равна нулю ввиду того, что выражения в квадратных скобках в первом и втором членах сводятся к выражениям вида $[\partial B^3_{,0} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})^3]/\mu$ и $[-\partial B^2_{,0} - (\mathrm{rot}\,\mathbf{E})^2]/\mu$, которые равны нулю в силу первого уравнения Максвелла для изотропной среды - ($3a$). Наконец, выражения в квадратных скобках последней строки результата сводятся к выражениям $[-\partial D^3_{,0} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^3]/\varepsilon$ и $[\partial D^2_{,0} - (\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2]/\varepsilon$, которые равны нулю в силу второго уравнения Максвелла для изотропной среды - ($3a$).

Литература:

1. Спиричев Ю.А. О выборе тензора энергии-импульса в электродинамике и силе Абрагама. УФН, т.188, № 3, 2018, с.325-328.
2. Скобельцын Д.В. О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля. УФН, июнь, 1973, 110 253–292.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том II. Теория поля. М. «Наука», 1982, 534 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред, М. «Наука», 1982, 621 с.
5. Макаров В. П., Рухадзе А. А., Тензор Минковского или тензор Абрагама? Инженерная физика, 2012, № 8, с. 3-5. Краткие сообщения по физике, ФИАН, №2, 2009.
6. Crenshaw M. E., Bahder T. B. Energy–Momentum Tensor for the Electromagnetic Field in a Dielectric. Academia.edu, 2010.
7. Crenshaw M. E., Bahder T. B. Energy–Momentum Tensor for the Electromagnetic Field in a Dielectric. arxiv.org>pdf/1006.1843V3, 2018.