Электродинамика движущихся сред в тензорной релятивистской форме

Львов Олег Сергеевич
г. Пенза

Рассматривается вариант решения уравнений электродинамики движущихся сред в тензорной релятивистской форме. Вводятся понятия 4-тензоров электрической проводимости и электромагнитной проницаемости сред. Приводятся примеры решения указанным методом некоторых задач электродинамики движущихся сред.

Введение

Вопросы электродинамики (ЭД) движущихся сред обычно рассматриваются с привлечением уравнений Максвелла, записанных в нерелятивистской форме [1, 2]. При этом получаются достаточно сложные для анализа математические зависимости, зачастую не допускающие решений в явном виде. Между тем математическое описание рассматриваемых процессов может быть упрощено при использовании соотношений электродинамики, записанных в форме тензоров 4-пространства теории относительности. Определенные шаги в этом направлении сделаны в работе И.Е. Тамма [3]. Однако указанную работу нельзя считать завершенной в части рассмотрения ЭД движущихся сред в тензорной релятивистской форме.

Для получения уравнений ЭД движущихся сред предлагается следующая методика. Предварительно записываются соотношения в тензорной релятивистской форме для простейшего случая неподвижной изотропной среды. Эти соотношения обобщаются на случай анизотропной среды, и на основании факта записи в строгой тензорной релятивистской форме объявляются справедливыми в общем случае движущейся среды. Для перехода к тензорам движущейся среды используется их лоренцево преобразование. В заключение производится анализ полученных выражений для наиболее интересных случаев, как в тензорной, так и в нерелятивистской векторной форме записи.

При переходе в движущуюся систему отсчета для упрощения расчетов рассматривается движение вдоль координаты x^1. При этом преобразование компонент тензоров производится следующим образом. В случае компонент с идентичными индексами вклад исходных в новые компоненты производится с коэффициентами $1/(1-\beta^2)^{n/2}$, где $\beta = v/c, v$ - скорость движения среды и n — общее число компонентных индексов 0 или 1. В случае замены индексов 0→1' или 1→0' при прочих идентичных индексах вклад исходных в новые компоненты производится с коэффициентами $(-\beta)^m/(1-\beta^2)^{n/2}$ при контравариантных индексах и с коэффициентами $\beta^m/(1-\beta^2)^{n/2}$ при ковариантных индексах 0 и 1. Здесь m — число указанных замен, n — общее число индексов 0 и 1 в компоненте. Другие варианты межкомпонентных вкладов отсутствуют.

Известно [1], что в релятивистской теории электрическое и магнитное поля в некоторой среде представляются в виде единого антисимметричного тензора второго ранга, ковариантные компоненты которого могут быть записаны в виде следующей таблицы:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Здесь E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля и B_i - компоненты вектора магнитной индукции. Контравариантные компоненты тензора напряженностей электромагнитного поля (ЭМП) отличаются от указанных обратным знаком членов, отвечающих вектору электрического поля.

Электрические свойства проводящей движущейся среды

Сначала рассмотрим простейший вариант использования предложенной методики для исследования электропроводящих свойств движущейся среды.

Как известно, плотность тока в неподвижной проводящей изотропной среде описывается векторным выражением $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$. При записи в компонентной форме это выражение имеет вид $j^i = \sigma E^i$. В случае анизотропной среды последнее выражение приобретает вид $j^i = \sigma^{ik} E^i$. Здесь $\sigma = 1/\rho$ — удельная проводимость изотропной среды, а σ^{ik} - симметричный тензор проводимости анизотропной среды, включающий 9 пространственных компонент.

Как указывалось выше, в релятивистской теории электрическое и магнитное поля в некоторой среде представляются в виде единого антисимметричного тензора второго ранга F_{ij}. Нетрудно понять, что выражению для плотности электрического тока j в неподвижной изотропной проводящей среде отвечает релятивистское тензорное выражение $j^i = 1/2\, \sigma^{ikl} F_{kl}$. Здесь σ^{ikl} — тензор третьего ранга, антисимметричный по двум последним индексам, у которого отличны от нуля 3 компоненты вида σ^{i0i}, равные σ, а также 3 компоненты σ^{ii0}, равные $-\sigma$. Индексы i могут принимать значения 1, 2, или 3. Здесь по повторяющимся индексам k и l согласно правилам тензорной алгебры производится суммирование, $k, l = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Действительно, в указанном случае мы имеем равенства для компонент вектора плотности тока $j^i = (\sigma^{i0i} F_{0i} +$

$\sigma^{ii0}F_{i0})/2 = \sigma E^i$, где $i = (1,2,3)$, которые отвечают вышеприведенному выражению в нерелятивистской векторной форме.

В случае анизотропной среды мы имеем дело с симметричным тензором проводимости второго ранга σ^{ik}. В релятивистской записи компонентам пространственного тензора проводимости σ^{ik} должны соответствовать 9 компонент 4-тензора проводимости вида σ^{i0k}, а еще 9 компонент этого тензора вида σ^{ik0} должны соответствовать тем же компонентам 3-тензора, взятым с обратным знаком. В этом случае формула для компонент плотности электрического тока, записанная через тензоры 4-пространства, принимает вид

$$j^i = \frac{1}{2}\,\sigma^{ikl}F_{kl} = \sigma^{ik}E_k\,, \qquad (2)$$

отвечающий вышеуказанному нерелятивистскому выражению.

В случае изотропной среды, движущейся вдоль координаты x^1, компоненты 4-тензора проводимости σ^{110} и σ^{101} изменяются, принимая значения $\sigma^{110} = -\sigma^{101} = \sigma/(1-\beta^2)^{3/2}$, а компоненты вида σ^{ii0} и σ^{i0i}, где $i \neq 1$, принимают значения $\sigma^{ii0} = -\sigma^{i0i} = \sigma/(1-\beta^2)^{1/2}$. Различие указанных компонент, отвечающих разным пространственным направлениям, свидетельствует об анизотропии проводимости движущейся среды, незначительной при нерелятивистских скоростях движения.

Кроме того появляются новые отличные от нуля компоненты вида $\sigma^{001} = -\,\sigma^{010} = -\sigma\beta/(1-\beta^2)^{3/2}$ и вида $\sigma^{i1i} = -\sigma^{ii1} = -\sigma\beta/(1-\beta^2)^{1/2}$, где $i \neq 1$. Влияние первых указанных компонент σ^{001} и σ^{010} выражается в появлении распределенного электрического заряда ρ в движущейся среде при наличии напряженности электрического поля E_1: $\rho = -\sigma\beta/(1-\beta^2)^{3/2}E_1$.

Влияние же компонент вида σ^{i1i} и σ^{ii1} выражается в появлении электрического тока при наличии магнитного поля, ортогонального к направлению движения среды. Значение компонент плотности этого тока при записи в тензорной форме отвечает выражению $J^i = \sigma^{i1i}F_{1i} = \sigma\beta/\sqrt{1-\beta^2}F_{1i}$, где $i = 2$ или 3. При записи в нерелятивистской векторной форме плотность рассматриваемого тока отвечает выражению

$$\boldsymbol{j} = \sigma[\boldsymbol{vB}]/\left(\mathrm{c}\sqrt{1-\beta^2}\right), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости движения среды.

Последняя формула может быть использована для объяснения работы и расчета униполярных генераторов [4]. При этом следует учитывать снижение расчетного тока под влиянием встречного электрического поля, возникающего при не нулевом сопротивлении нагрузки генератора.

Электродинамика движущейся диэлектрической среды

Как известно [1, 2], уравнения Максвелла для неподвижной изотропной среды в векторном представлении имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{c\,\partial t}\,, \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad (4a)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{c\,\partial t} + \boldsymbol{j}\,, \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho, \qquad (4b)$$

Здесь $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, где ε и μ - соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В случае анизотропных сред скалярные величины ε и μ заменяются симметричными пространственными тензорами ε^{ik} и μ^{ik}, а приведенные выше векторные зависимости между напряженностями и индукциями полей - тензорными зависимостями в 3-пространстве

$$D^i = \varepsilon^{ik}\mathrm{E_k} \text{ и } B^i = \mu^{ik}H_k. \qquad (5)$$

В релятивистской тензорной записи согласно [1] уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F^{jk}}{\partial x^i} = 0 \left(\text{или } \varepsilon^{ijkl}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} = 0\right) \qquad (6a)$$

$$\text{и } \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = j^i. \qquad (6b)$$

Здесь F^{ij} - указанный ранее тензор напряженностей ЭМП, ε^{ijkl} — полностью антисиметричный единичный тензор. Компоненты же нового антисимметричного 4-тензора индукции H^{ik}, введенного на основании уравнений (4b), отвечают матричному выражению

$$H^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Ввиду релятивисткой формы записи уравнения (6) остаются справедливыми в движущейся среде. Однако при обратном переходе к нерелятивистскому представлению в рассматриваемом случае получается весьма сложное, не разрешаемое в явном виде соотношение между векторами напряженности и индукции ЭМП (см. формулы (76.9) в источнике [1]).

Ниже предлагается другой вариант записи уравнений Максвелла в релятивистской форме с исключением дополнительного тензора H^{ik}. Принимая во внимание линейную связь тензоров напряженностей и индукции ЭМП, для компонент тензора H^{ik} может быть записано тензорное соотношение

$$H^{ij} = 1/2\,\gamma^{ijkl}F_{kl}. \qquad (8)$$

Здесь γ^{ijkl} - 4-тензор электромагнитной проницаемости, антисимметричный по первой и второй паре индексов, который определяет вклад от каждой компоненты исходного тензора ЭМП F_{kl} в любую компоненту тензора индукции H^{ij}. При учете формулы (8) второе тензорное уравнение Максвелла (6b) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\gamma^{ijkl}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} = j^i. \qquad (9)$$

На основе первого уравнения (6a) может быть введен 4-вектор-потенциал ЭМП A_i, связанный с напряженностями поля соотношением $F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$. При этом второе уравнение Максвелла (9) записывается в виде совокупности вторых производных от вектора-потенциала A_i. В ряде случаев введение вектора-потенциала упрощает решение уравнений (6,9).

Введенный тензор электромагнитной проницаемости γ^{ijkl} легко определяется для неподвижной среды. При этом его "электрические" компоненты определяются тензором диэлектрической проницаемости по формуле $\gamma^{i0j0} = \varepsilon^{ij}$. В случае изотропной среды формула имеет вид $\gamma^{i0j0} = \delta^{ij}\varepsilon$, где δ^{ij} - единичный диагональный тензор.

В случае "магнитных" компонент связь тензоров γ^{ijkl} и μ^{ik} несколько сложнее. Поскольку взаимосвязь векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ в случае анизотропных сред отвечает соотношению $B^i = \mu^{ik}H_k$, то интересующая нас обратная связь компонент векторов $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ будет определяться соотношением $H^i = \tilde{\mu}^{ik}B_k$, где $\tilde{\mu}^{ik}$ -тензор обратный тензору магнитной проницаемости ($\tilde{\mu}^{ik}\mu_{jk} = \delta^i_j$).

При этом чисто пространственные компоненты тензора γ^{ijkl}, отвечающие магнитным компонентам тензоров H_{ij} и F_{ij}, будут определяться соотношением $\gamma^{ijkl} = \varepsilon^{ijp}\varepsilon^{klq}\tilde{\mu}_{pq}$, где ε^{ijp} и ε^{ijp} - полностью антисимметричные единичные тензоры 3-пространства. В случае магнитной изотропии среды $\gamma^{ijkl} = \varepsilon^{ijp}\varepsilon^{klq}\delta_{pq}/\mu$.

Ввиду симметрии тензоров ε^{ij} и μ^{ij} тензор γ^{ijkl} обладает симметрией при перестановке первой и второй пары индексов. В случае анизотропной неподвижной среды тензор γ^{ijkl} при общем количестве компонент – 144 может иметь до 72 отличных от нуля компонент, включающих до 12 констант.

В случае неподвижной изотропной среды тензор электромагнитной проницаемости имеет 12 отличных от нуля компонент электрического типа, включающих 3 базовые компоненты вида $\gamma^{0i0i} = \varepsilon$ и 9 компонент, получаемых из базовых перестановками индексов, а также 12 компонент магнитного типа, включающих 3 базовые компоненты вида $\gamma^{ijij} = -1/\mu$ и 9 перестановочных компонент. Здесь всюду $(i \neq j) \neq 0$.

В случае движущейся изотропной среды часть тензорных компонент изменяется и появляется ряд новых ненулевых компонент. А именно, в среде, движущейся вдоль координаты x^1, базовые компоненты вида γ^{0i0i} $(i = 2,3)$ принимают новые значения $\varepsilon(1+\beta^2) - \beta^2/\mu$, а базовые компоненты γ^{1i1i} $(i = 2,3)$ - новые значения $-(1+\beta^2)/\mu + \beta^2\varepsilon$. Соответственно изменяются еще 6 перестановочных компонент. Здесь значения компонент указаны с точностью до величины порядка β^2.

Кроме того появляются новые не нулевые компоненты вида γ^{0212} и γ^{0313}, равные с точностью до членов порядка β величине $\beta(1/\mu - \varepsilon)$. Те же значения модуля имеют еще 14 перестановочных компонент тензора γ^{ijkl}.

Займемся далее анализом свойств рассматриваемой движущейся среды.

Во-первых, нарушается свойство изотропии среды в части электрической и магнитной проницаемости, связанное с изменением компонент γ^{0i0i} и γ^{1i1i} $(i = 2,3)$. Однако указанные отклонения от изотропии имеют порядок величины β^2, и экспериментально трудно обнаружимы. Более значимо появление новых базовых компонент γ^{0212} и γ^{0313} порядка величины β, которые, как будет показано ниже, приводят к относительно большому изменению скорости электромагнитных (ЭМ) волн в среде.

Рассмотрим далее ЭМ волны в анализируемой среде, движущиеся в направлении координаты x^1 или в обратном направлении. В данном случае достаточно введение вектора-потенциала, содержащего одну компоненту A_2, производящую две базовые компоненты ЭМП $F_{02} = -\partial A_2/\partial x^0$ и $F_{12} = -\partial A_2/\partial x^1$.

После подстановки в уравнение (9) указанных компонент напряженности ЭМП, выражаемых через вектор-потенциал A_2, получим с точностью до членов порядка β следующее дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^{0^2}} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^{1^2}} - 2\beta\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^0 \partial x^1} = 0. \qquad (10)$$

Определим решения этого уравнения вида синусоидальной волны $A_2 = \sin(\omega t - kx^1)$. После подстановки указанного выражения в (10) получаем следующее соотношение для компонент волнового вектора ω и k:

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{\mu} - 2\frac{\beta}{c}\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\omega k = 0. \qquad (11)$$

Решая это квадратное уравнение, получаем значение ω с точностью до членов порядка β

$$\omega = \beta c\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)k \pm \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (12)$$

По формуле $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ определяем групповые скорости ЭМ волн

$$v_{\text{гр}} = v\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \pm \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (13)$$

Здесь выражение $\pm c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ отвечает основной скорости прямой и обратной ЭМ волны, которая равна скорости волны в неподвижной среде. Выражение же $v \cdot (1 - 1/\varepsilon\mu)$ отвечает дополнительной скорости увлечении ЭМ волны движущейся средой [5]. Можно видеть, что с ростом произведения $\varepsilon\mu$ скорость увлечения ЭМ волны приближается к скорости движения среды.

Литература:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред, М. «Наука», 1982, 621 с.
2. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика, М. «Наука», 1978, 352 с.
3. Тамм И. Е. Собрание научных трудов в двух томах. Т.1, М «Наука», 1975, стр.19-67. Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности, 1924.
4. Униполярный генератор — Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Униполярный генератор
5. Опыт Физо — Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Опыт Физо