

Расчет конструкций с нелинейной податливостью в односторонних связях

Лукашевич Надежда Кимовна, кандидат технических наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматривается конечно-элементная модель и численное решение контактной задачи при наличии нелинейно-деформируемого слоя между взаимодействующими конструкциями. Для дискретизации слоя используются контактные конечные элементы, с помощью которых моделируются различные состояния контакта (отрыва, сцепления, трения-скольжения и т. д.). Использование контактных элементов позволяет физическую нелинейность контактного слоя свести к внутренней нелинейности системы контактных элементов, при этом нелинейные свойства шва будут задаваться через нелинейные характеристики контактных элементов. Численный алгоритм решения контактной задачи строится на основе метода пошагового анализа с итерационным уточнением решения для текущего уровня нагружения. С его помощью получены и проанализированы численные решения задачи контакта сооружения с основанием при различных условиях работы контактного шва.

Ключевые слова: контактная задача, односторонние связи, пошаговый анализ, контактный слой, нелинейная податливость

Задачи контактного взаимодействия конструкций и их частей имеют широкую область приложений в строительстве и других областях инженерной деятельности. При этом нередко именно состояние зоны контакта может быть определяющим при оценке напряженно-деформированного состояния, прочности и надежности конструкций и сооружений [1]. В некоторых случаях бывает необходимо учитывать нелинейные свойства контактного шва. Использование метода конечных элементов (МКЭ) позволяет реализовать подобного рода физическую нелинейность, сводя ее к внутренней нелинейности системы контактных конечных элементов (ККЭ), дискретизирующих промежуточный слой. Решение таких задач приводит к решению нелинейной системы уравнений на каждом шаге нагружения или итерации. Различные итерационные схемы учета нелинейных эффектов на контакте рассматривались в работах [2–4]. Нелинейная связь между деформацией контактного слоя и контактными напряжениями здесь задается с помощью соответствующих нелинейных зависимостей.

Рассматривается плоская контактная задача для линейно упругих тел V^+ и V^- , между граничными поверхностями которых (S_c^+ , S_c^-) находится нелинейно-деформируемый контактный слой толщиной ζ^0 и податливостью ρ_n , ρ_τ (соответственно по нормали и касательной). Моделирование контакта в дискретной модели МКЭ осуществляется с помощью плоских рамно-стержневых контактных элементов [5]. С помощью ККЭ моделируются как нелинейная податливость контактного шва, так и различные состояния контакта (отрыва, сцепления, трения-скольжения). Считая k -й контактный элемент как k -ю дискретную односторонне податливую связь (по нормали и касательной) между взаимодействующими телами, запишем условия на контакте в терминах усилий и перемещений для k -го контактного элемента ($k \in S_c$, $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$):

$$u_{nk} + u_{nk}^c \leq 0; \quad N_k \leq 0; \quad (u_{nk} + u_{nk}^c) N_k = 0.$$

$$|T_k| \leq |T_{pk}|; \quad T_k (u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) \geq 0; \quad (|T_k| - T_{pk}) (u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) = 0. \quad (1)$$

$$u_{nk}^c = N_k / C_{nk}; \quad u_{\tau k}^c = T_k / C_{\tau k}.$$

Здесь u_{nk} , $u_{\tau k}$ – взаимное смещение противоположащих узлов на S_c^+ и S_c^- в направлении нормали и касательной; u_{nk}^c , $u_{\tau k}^c$ – продольная и поперечная деформация в k -м ККЭ; N_k , T_k – усилия в k -м ККЭ; $T_{pk} = -f_k N_k$ – предельная «кулоновская» сила трения; $f_k \geq 0$ – коэффициент трения на k -м контакте; C_{nk} , $C_{\tau k}$ – нормальная и касательная жесткости материала контактного шва.

Численная реализация контактных условий (1) выполняется при помощи пошагового анализа изменения состояния контакта в процессе последовательного приложения заданной нагрузки [6]. При этом имеем возможность в лучшей степени удовлетворить условиям трения, поскольку решение задачи с трением зависит от истории нагружения конструкции. Переход от одного состояния к другому представляет собой соответственно событие выключения, включения односторонней связи, проскальзывания или сцепления. Метод пошагового анализа является наиболее эффективным для рассматриваемого класса контактных задач, кроме того, имеется возможность отслеживать текущее состояние контактного шва в процессе нагружения конструкции.

Алгоритм пошагового анализа, в том числе последовательность действий на каждом шаге, как при статическом, так и динамическом нагружении, достаточно подробно изложен в [5, 6]. В его основе – представление

конструктивно нелинейной контактной задачи в виде последовательности конечного числа линейных задач при последовательном изменении рабочих схем сооружения. Из анализа поведения рабочей схемы определяется момент наступления очередного события на контакте. В результате очередного шага изменяется рабочая схема и устанавливается новое состояние контакта.

При нелинейном законе деформирования контактного слоя жесткости в направлении нормали и касательной будут являться функциями от величин соответственно обжатия и сдвига контактного слоя: $C_n = C_n(u_n^c)$; $C_\tau = C_\tau(u_\tau^c)$. Использование ККЭ позволяет физическую нелинейность слоя свести к внутренней нелинейности только системы контактных элементов, при этом нелинейные свойства шва будут задаваться через нелинейные характеристики ККЭ.

При пошаговом решении контактной задачи (на основе дискретной модели МКЭ) для каждого (s+1)-го уровня нагружения справедливо следующее матричное уравнение равновесия:

$$\left[\mathbf{K}_{lin} + \mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}^{s+1}) \right] \Delta \mathbf{u}^{s+1} = \mathbf{P}^{s+1} - \left[\mathbf{K}_{lin} + \mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}^{s+1}) \right] \mathbf{u}^s. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{u}^{s+1} и \mathbf{P}^{s+1} – соответственно векторы узловых перемещений и внешней нагрузки в конце (s+1)-го шага; $\Delta \mathbf{u}^{s+1}$ – приращение перемещений на (s+1)-м шаге; \mathbf{K}_{lin} , $\mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}^{s+1})$ – линейная и нелинейная составляющие матрицы жесткости системы конечных элементов.

Перенеся нелинейную составляющую $\mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}^{s+1}) \Delta \mathbf{u}^{s+1}$ в правую часть, можно записать следующее рекуррентное уравнение для определения $\Delta \mathbf{u}^{s+1}$:

$$\mathbf{K}_{lin} \Delta \mathbf{u}_i^{s+1} = \mathbf{P}_{lin}^{s+1} - \mathbf{P}_{i-1}^{s+1}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}), \quad (3)$$

где $\Delta \mathbf{u}_i^{s+1}$ – значения приращений перемещений на текущей i-й итерации; $\mathbf{P}_{lin}^{s+1} = \left(\mathbf{P}^{s+1} - \mathbf{K}_{lin} \mathbf{u}^s \right)$ – постоянная (линейная) часть вектора правых частей; $\mathbf{P}_{i-1}^{s+1}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) = \mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) \left(\mathbf{u}^s + \Delta \mathbf{u}_{i-1}^{s+1} \right)$ – изменяемая часть вектора правых частей.

Представим нелинейную матрицу $\mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u})$, отвечающую дискретному слою, как сумму нелинейных составляющих матриц жесткости ККЭ:

$$\mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}) = \sum_k \left[\mathbf{K}_{n\,nel}^{(k)}(u_n^c) + \mathbf{K}_{\tau\,nel}^{(k)}(u_\tau^c) \right]. \quad (4)$$

В свою очередь, нелинейная составляющая матрицы жесткости k-го ККЭ, например $\mathbf{K}_{n\,nel}^{(k)}(u_n^c)$, может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{K}_{n\,nel}^{(k)}(u_n^c) = C_n(u_n^c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь вклад отдельного ККЭ в изменяемую “нелинейную” часть вектора правых частей $\mathbf{K}_{nel}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) \left(\mathbf{u}^s + \Delta \mathbf{u}_{i-1}^{s+1} \right)$ будет следующим:

$$C_n(u_n^c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_n^+)^s + (\Delta u_n^+)^{s+1}_{i-1} \\ (u_n^-)^s + (\Delta u_n^-)^{s+1}_{i-1} \end{Bmatrix} = C_n(u_n^c) \begin{Bmatrix} -(u_n^c)^s - (\Delta u_n^c)^{s+1}_{i-1} \\ (u_n^c)^s + (\Delta u_n^c)^{s+1}_{i-1} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $(u_n^+)^s$, $(u_n^-)^s$ – перемещения противоположных точек на S_c^+ , S_c^- в конце s-го шага; $(\Delta u_n^\pm)^{s+1}_{i-1} = (u_n^\pm)^{s+1}_{i-1} - (u_n^\pm)^s$ – соответственно приращения перемещений противоположных точек в (i-1)-м приближении для (s+1)-го шага; $(u_n^c)^s$ – обжатие слоя между граничными поверхностями для s-го уровня нагружения; $(\Delta u_n^c)^{s+1}_{i-1} = (u_n^c)^{s+1}_{i-1} - (u_n^c)^s$ – приращение величины обжатия слоя в (i-1)-м приближении для (s+1)-го шага.

С учетом нелинейного деформирования контактного слоя, как в нормальном, так и в касательном направлении, итерационное выражение (4) примет следующий вид:

$$\mathbf{K}_{lin} \Delta \mathbf{u}_i^{s+1} = \mathbf{P}_{lin}^{s+1} - \left(\sum_{k \in S_{1c}, S_{2c}} \begin{Bmatrix} F_{nk}^+ \\ F_{nk}^- \end{Bmatrix} + \sum_{k \in S_{1c}} \begin{Bmatrix} F_{\tau k}^+ \\ F_{\tau k}^- \end{Bmatrix} \right)_{i-1}^{s+1}. \quad (7)$$

Здесь F_{nk}^+ , F_{nk}^- , $F_{\tau k}^+$, $F_{\tau k}^-$ – силы, прикладываемые на i -й итерации в процессе итерационного уточнения величины Δu^{s+1} для $(s+1)$ -го шага нагружения к противоположным узлам контактных поверхностей S_c^+ и S_c^- соответственно по нормали и по касательной.

Левая часть уравнений (7) для данной рабочей схемы контакта здесь не меняется, что позволяет провести факторизацию матрицы жесткости один раз, корректируя затем значение Δu_i^{s+1} до тех пор, пока разница между двумя последующими итерациями не будет удовлетворять заданной точности расчета. При этом значения корректирующих сил F_{nk}^+ , F_{nk}^- , $F_{\tau k}^+$, $F_{\tau k}^-$ вычисляются по результатам предыдущей $(i-1)$ -й итерации:

$$\begin{Bmatrix} F_{nk}^+ \\ F_{nk}^- \end{Bmatrix} = C_n(u_n^c) \begin{Bmatrix} -(u_n^c)^s - (\Delta u_n^c)_{i-1}^{s+1} \\ (u_n^c)^s + (\Delta u_n^c)_{i-1}^{s+1} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} F_{\tau k}^+ \\ F_{\tau k}^- \end{Bmatrix} = C_\tau(u_\tau^c) \begin{Bmatrix} -(u_\tau^c)^s - (\Delta u_\tau^c)_{i-1}^{s+1} \\ (u_\tau^c)^s + (\Delta u_\tau^c)_{i-1}^{s+1} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Соответствующие выражения для уточнения момента наступления очередного события на контакте (выключения, включения связи, проскальзывания или зацепления) будут записываться в виде итерационных формул. В остальном последовательность численного решения контактной задачи с нелинейно деформируемым слоем соответствует алгоритму, изложенному в [6].

Нелинейный закон деформирования контактного слоя в действительности может быть гораздо сложнее, чем записанный в виде (5). Прежде всего, это относится к касательным усилиям, при учете которых следует принимать во внимание не только деформации сдвига, но и обжатие контактного слоя. В этом случае использование метода пошагового анализа позволяет устанавливать зависимость усилий от деформаций на каждом отдельном шаге нагружения, проводя затем итерационное уточнение решения для текущего уровня нагружения.

С использованием изложенного подхода получены численные решения для тестовой задачи контактного взаимодействия сооружения с основанием. На участках контакта возможны условия кулоновского трения-скольжения (коэффициент трения $f = 0.2$), а также отрыва граничных поверхностей друг от друга. Разбивка на конечные элементы показана на рис. 2, а. Контактный шов моделировался девятью ККЭ. Целью расчетов являлась оценка различных условий контактного взаимодействия на напряженно-деформируемое состояние подошвы сооружения. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных при следующих условиях работы контактного шва (условиях контакта):

- 1) при нулевой податливости контактного шва (с учетом трения Кулона);
- 2) при линейной податливости контактного шва в обоих направлениях;
- 3) при нелинейной податливости контактного шва в направлении нормали.

Результаты расчетов – взаимные перемещения и напряжения на контакте представлены на рис. 2, б, в, г. Сплошная линия соответствует расчету по первому варианту, штриховая – по второму, пунктирная – по третьему.

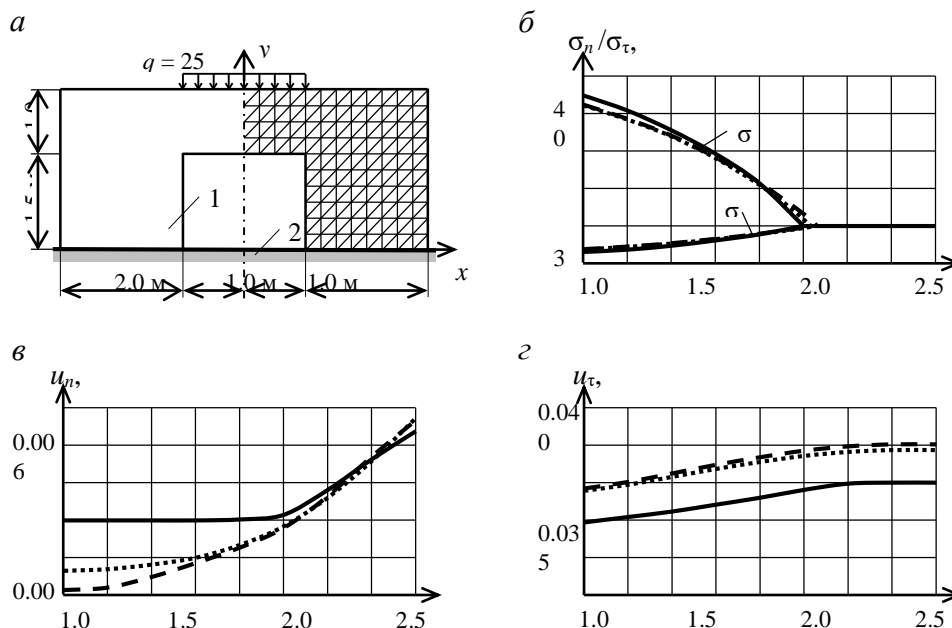


Рис. 2. Задача о взаимодействии сооружения (1) с основанием (2):
 а – расчетная схема; б – контактные напряжения; в, г – взаимные перемещения

Как видно из результатов расчета, зона отрыва контактных поверхностей имеет наибольшие размеры при жестком контакте сооружения с основанием. При учете податливости шва (толщина $\zeta^0 = 2$ мм, коэффициент податливости $\rho_0 = 1,25 \cdot 10^{-7}$ м³/МН, модуль упругости материала сооружения 3060 МПа) зона отрыва ненамного уменьшается. В то же время за счет деформаций сдвига промежуточного слоя взаимное смещение контактных поверхностей по горизонтали возрастает на 20%. Интенсивность контактных напряжений здесь несколько меньше, чем в случае жесткого контакта. Отметим, что результаты пошагового расчета по первому и второму вариантам полностью соответствуют решениям рассматриваемой задачи, полученным посредством итерационных методов [7].

Нелинейный закон деформирования контактного шва в направлении нормали к граничным поверхностям условно задавался следующей функцией:

$$C_{nk}(u_{nk}^c) = A_k / \left[\rho_0 \left(1 - \sqrt[3]{|u_{nk}^c| / \zeta^0} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь A_k – площадь контакта, относящаяся к k -му ККЭ. В касательном направлении жесткость шва принималась постоянной $C_{\tau k} = A_k / \rho_0$. Сопоставление результатов расчета показывает, что учет нелинейного деформирования контактного шва приводит к некоторому перераспределению деформаций при его обжатии.

Проведенные расчеты подтверждают, что учет податливости контактного шва, в частности, между сооружением и основанием, имеет важное значение при оценке напряженно-деформированного состояния и, таким образом, для нормальной эксплуатации сооружения. Моделирование податливости односторонних связей рамно-стержневыми контактными элементами позволяет конструктивную и физическую нелинейность задачи свести к внутренней нелинейности только самого дискретного контактного слоя. В свою очередь наличие фактора податливости в односторонних связях можно также рассматривать и как способ регуляризации – т. е. улучшения свойств контактной задачи с трением.

Литература:

1. Колосова Г.С., Лалин В.В., Колосова А.В. Влияние строительных швов и трещин на напряженно-деформированное состояние арочно-гравитационной плотины // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5(40). С. 76–85.
2. Бабин А.П., Зернин М.В. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 84–107.
3. Laursen T.A., Kim T.Y., Dolbow J.E. A mortared finite element method for frictional contact on arbitrary surfaces // Computational Mechanics. 2007. No. 39. Pp. 223–235.
4. Wriggers P., Rust W.T., Reddy B.D. A virtual element method for contact // Computational Mechanics. 2016. No. 58(6). Pp. 1039–1050.
5. Лукашевич А.А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач // Изв. вузов. Строительство. 2007. № 12. С. 18–23.
6. Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 1(36). С. 75–81.
7. Розин Л.А. Смирнов М.С. Решение контактных задач теории упругости с податливостью в односторонних связях // Изв. вузов. Строительство. 2000. № 5. С. 27–31.