ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 517.946

О разрешимости обратной задачи восстановления источника в обобщенном уравнении Буссинеска

Курманбаева Айнура Кудайбергеновна, кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры «Естественные науки»
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова
(Кыргызская Республика, г. Бишкек)

Аннотация. *В работе изучается обратная задача восстановления источника из обобщенного уравнения Буссинеска. Обратная задача заключается в определении источника зависящего отвремени по дополнительной информации во внутренной точке. Установлены достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой обратной задачи.*

Ключевые слова: *обобщенное уравнение Буссинеска, обратная задача, условия существования и единственности решения, метод операторных уравнений Вольтерра, нагруженное уравнение.*

On the solvability of the inverse problem of source recovery in the generalized Boussinesq equation

Annotation. *This paper studies the inverse problem of source recovery from the generalized Boussinesq equation. The inverse problem is to of determining a time - dependent source according to additional information at the internal point. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the classical solution of the considered inverse problem are established.*

Keywords: *generalized Boussinesq equation, inverse problem, conditions of existence and uniqueness of the solution, Volterra operator equations method, loaded equation.*

Введение

В работе изучается обратная задача определения временного источника в обобщенном уравнении Буссинеска. Как известно, обобщенное уравнение Буссинеска является одним из математических моделей Соболевского типа и описывает фильтрации жидкости в пористой среде. В монографии П. Я. Кочиной [7] отмечено, что фильтрационное уравнение Буссинеска недостаточно моделирует процесс фильтрации. В работе [8] Е. С. Дзекцер устранил этот недостаток и вывел уравнение описывающее движение свободной поверхности фильтрующейся в слое конечной глубины жидкости. Позже, исходя из других физических предпосылок, аналогичную версию обобщенного уравнения Буссинеска получили В.З.Фураев и Г.А.Шадрин [4].

Исследованию вопросов разрешимости задачи Коши, Гурса и начально-краевых задач для обобщенного уравнения Буссинеска уравнений посвящены работы [2,3,5,6].

Постановка задачи и основный результат. В прямоугольнике $\Pi_T = \{(x,t) \big| 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$ рассмотрим нелинейное обобщенное уравнение Буссинеска

$$u_t(x,t) = \alpha(u^2(x,t))_{xx} + u_{xxt}(x,t) + f(t)h(x,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $h(x,t), u_0(x), \quad \mu_1(t), \mu_2(t)$ - заданные функции.

Требуется опеределить функции $u(x,t), f(t)$, удовлетворяющие задаче (1) -(3) и условию

$$u(x_0,t) = \psi(t), \qquad 0 \le t \le T, \qquad 0 < x_0 < l, \tag{4}$$

где $\psi(t)$ – заданная функция.

Отметим, что обратная задача (1) -(4), в случае $|h(x,t)| \ge h_0 > 0\ \forall (x,t) \in \bar{\Pi}_T$ изучена в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи (1) -(4) называется пара функций $(u(x,t), f(t)) \in C^{(4,1)}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T) \times C[0,T]$, удовлетворяющая условиям (1)-(4).

ТЕОРЕМА. Пусть $u_0(x) \in C^2[0,l], \quad \mu_1, \mu_2 \in C^1[0,T],\ h(x,t) \in C^{(2,0)}(\bar{\Pi}_T),$
$|h(x_0,t)| \ge h_0 > 0,\ h(0,t) = h(l,t) = 0$ и выполнены условия согласования

$u_0(0)=\mu_1(0), \quad u_0(l)=\mu_2(0), \quad u_0(x_0)=\varphi(0)$. Тогда существует единственное решение задачи (1) -(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив в (1) $x=x_0$ и учитывая условие (4), получим соотношение

$$f(t)=\frac{\psi'(t)-\left(u^2\right)_{xx}(x_0,t)-u_{xxt}(x_0,t)}{h(x_0,t)}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (1), получим задачу

$$u_t(x,t)=\alpha(u^2(x,t))_{xx}+u_{xxt}(x,t)+\frac{\psi'(t)-\left(u^2\right)_{xx}(x_0,t)-u_{xxt}(x_0,t)}{h(x_0,t)}h(x,t), \tag{6}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le l, \tag{7}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

Заметим, что уравнение (6) является нелинейным нагруженным уравнением Буссинеска.

Введем обозначение $\vartheta(x,t)=u(x,t)$. Тогда функция $\vartheta(x,t)$ является решением краевой задачи

$$v_t(x,t)-\alpha(v^2(x,t))_{xx}-v_{xxt}(x,t)=\frac{\psi'(t)-\alpha\left(v^2\right)(x_0,t)-v_t(x_0,t)}{h(x_0,t)}h_{xx}(x,t), \tag{9}$$

$$v(x,0)=u_0''(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{10}$$

$$\alpha(v^2(0,t))+v_t(0,t)=\mu_1'(t), \quad \alpha(v^2(l,t))+v_t(l,t)=\mu_2'(t). \tag{11}$$

Обращая оператор $I-\partial^2/\partial x^2$, и произведя два раза интегрирование по частям, из условий (9), (11), получим

$$v_t(x,t)+\alpha v^2(x,t)=\alpha\int_0^l G(x,\xi)v^2(\xi,t)d\xi-\frac{\alpha\left(v^2\right)(x_0,t)+v_t(x_0,t)}{h(x_0,t)}\int_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi+a(x,t), \tag{12}$$

где

$$G(x,\xi)=\frac{1}{shl}\begin{cases} shx\cdot sh(l-\xi), & 0\le x\le\xi \\ sh\xi\cdot sh(l-x), & \xi\le x\le l,\end{cases}$$

$$a(x,t)=\frac{sh(l-x)}{shl}\left(\mu_1'(t)+\alpha\mu_1^2(t)\right)+\frac{shx}{shl}\left(\mu_2'(t)+\alpha\mu_2^2(t)\right)+$$

$$+\frac{\psi'(t)}{h(x_0,t)}\int_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi.$$

Положив в (12) $x=x_0$, найдем

$$v_t(x_0,t)+\alpha v^2(x_0,t)=\frac{\alpha}{b(t)}\int_0^l G(x_0,\xi)v^2(\xi,t)d\xi+\frac{a(x,t)}{b(t)}, \tag{13}$$

где

$$b(t)=1+\frac{1}{h(x_0,t)}\int_0^l G(x_0,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi. \tag{14}$$

Подставив в (12) вместо $v_t(x_0,t)+\alpha v^2(x_0,t)$ выражение (13), в результате получим интегро-дифференциальное уравнение для функции $v(x,t)$:

$$v_t+\alpha v^2=\alpha\int_0^l G(x,\xi)v^2(\xi,t)d\xi+h_1(x,t)\int_0^l G(x_0,\xi)v^2(\xi,t)d\xi+c(x,t),$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

где $h_1(x,t) = -\dfrac{\alpha}{b(t)h(x_0,t)}\int\limits_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi,$

$$c(x,t) = -\frac{a(x,t)}{b(t)}\int\limits_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi + a(x,t).$$

Интегрирование последнего уравнения при условии (10) дает

$$\vartheta(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^l K(x,\xi,\tau)\vartheta^2(\xi,\tau)d\xi d\tau - \alpha\int\limits_0^t \vartheta^2(x,\tau)d\tau + \vartheta_0(x,t), \tag{15}$$

где

$$K(x,\xi,\tau) = \alpha G(x,\xi) - h_1(x,\tau)G(x_0,\xi), \tag{16}$$

$$\vartheta_0(x,t) = \int\limits_0^t c(x,\tau)d\tau + u_0''(x). \tag{17}$$

Оценим функции $b(t)$, $h_1(x,t)$, $a(x,t),\ c(x,t)$:

$$|b(t)| = \left|1 + \frac{1}{h(x_0,t)}\int\limits_0^l G(x_0,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi\right| \le 1 + \frac{1}{h_0}\|h_{\xi\xi}\|_{C(\bar{\Pi}_T)}\int\limits_0^l G(x_0,\xi)d\xi = \frac{h_0 + \|h_{\xi\xi}\|_{C(\bar{\Pi}_T)}}{h_0} \equiv C_1,$$

$$|h_1(x,t)| = \left|-\frac{\alpha}{b(t)h(x_0,t)}\int\limits_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi\right| \le \frac{\alpha\|h_{\xi\xi}(\xi,t)\|}{\|b(t)\|_{C[0,T]}h_0} \equiv C_2,$$

$$|a(x,t)| \le \left|\frac{sh(l-x)}{shl}\right|\left(|\mu_1'(t)| + \alpha\left|\mu_1^{\,2}(t)\right|\right) + \left|\frac{shx}{shl}\right|\left(|\mu_2'(t)| + \alpha\left|\mu_2^{\,2}(t)\right|\right) +$$

$$+\frac{|\psi'(t)|}{|h(x_0,t)|}\int\limits_0^l G(x,\xi)|h_{\xi\xi}(\xi,t)|d\xi \le \left[\|\mu_1'(t)\| + \alpha\left\|\mu_1^{\,2}(t)\right\|\right]k_1 +$$

$$+\left[\|\mu_2'(t)\| + \alpha\left\|\mu_2^{\,2}(t)\right\|\right]k_2 + \frac{\|\psi'(t)\|}{h_0}\|h_{\xi\xi}(\xi,t)\| \equiv C_3,$$

$$|c(x,t)| = \left|-\frac{a(x,t)}{b(t)}\int\limits_0^l G(x,\xi)h_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi + a(x,t)\right| \le \frac{\|a(x,t)\|}{\|b(t)\|}\|h_{\xi\xi}(\xi,t)\| + \|a(x,t)\| \le$$

$$\le \frac{C_3}{C_1}\|h_{\xi\xi}(\xi,t)\| + C_3 \equiv C_4.$$

Здесь мы пользовались тем, что $\int\limits_0^l G(x,\xi)d\xi = 1.$

Введем оператор *A*, определив его формулой

$$A\vartheta \equiv \int\limits_0^t\int\limits_0^l K(x,\xi,\tau)\vartheta^2(\xi,\tau)d\xi d\tau - \alpha\int\limits_0^t \vartheta^2(x,\tau)d\tau + \vartheta^0(x,t), \tag{18}$$

и перепишем уравнение (15) в виде операторного уравнения

$$\vartheta = A\vartheta \tag{19}$$

В пространстве $C(\bar{\Pi}_T)$ рассмотрим множество $M(T)$ функций $\vartheta(x,t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\vartheta - \vartheta^0\|_C(T) \le \|\vartheta^0\|_C(T) \tag{20}$$

Покажем, что при достаточно малых T оператор A осуществляет сжатое отображение множества $M(T)$ в себя и для $\vartheta \in M(T)$ справедливо неравенство $\|\vartheta\|_C (T) \le 2\|\vartheta^0\|_C (T).$

Для оценки интегралов нам понадобятся оценки функции $K(x,\xi,\tau)$ и $\vartheta^0(x,t)$:

$$|K(x,\xi,\tau)| = |\alpha G(x,\xi) - h_1(x,\tau)G(x_0,\xi)| \le \alpha |G(x,\xi)| + |h_1(x,\tau)||G(x_0,\xi)| \le$$

$$\le \left[\alpha + \|h_1(x,\tau)\|\right]\|G(x,\xi)\| \le [\alpha + C_2]\|G(x,\xi)\|,$$

$$|\vartheta^0(x,t)| \le \int_0^t |c(x,\tau)|d\tau + |u_0''(x)| \le TC_4 + \|u_0''(x)\|.$$

С другой стороны, оценивая интегралы, входящие в формулы (18), получим

$$\|A\vartheta - \vartheta^0\| \le \int_0^t\int_0^l \|K(x,\xi,\tau)\|\|\vartheta^2(\xi,\tau)\|d\xi d\tau + \alpha\int_0^t \|\vartheta^2(x,\tau)\|d\tau \le$$

$$\le 4\|K\|Tl\left\|\left(\vartheta^0\right)^2\right\| + 4\alpha T\left\|\left(\vartheta^0\right)^2\right\| \le \left(4\|K\|Tl + 4\alpha T\right)\left\|\left(\vartheta^0\right)^2\right\|,$$

поэтому для $T \le \left(4\|K\|l + 4\alpha\right)^{-1}$ оператор A переводит множество $M(T)$ в себя.

Докажем, что при выполнении условий теоремы, нелинейное уравнения (18) имеет единственное решение $\vartheta(x,t) \in M(T)$.

Пусть $\vartheta_1(x,t), \vartheta_2(x,t)$ - любые два элемента из множества M_T. Тогда

$$\|A\vartheta_1 - A\vartheta_2\|_{C(\bar{\Pi}_T)} \le \int_0^t\int_0^l \|K(x,\xi,\tau)\|\|\vartheta_1^2(\xi,\tau) - \vartheta_2^2(\xi,\tau)\|d\xi d\tau + \alpha\int_0^t \|\vartheta_1^2(x,\tau) - \vartheta_2^2(x,\tau)\|d\tau \le$$

$$\le 4\|\vartheta_0\|T\left(l\|K\| + \alpha\right)\|\vartheta_1 - \vartheta_2\| \le \frac{T}{T^*}\|\vartheta_1 - \vartheta_2\|.$$

Отсюда вытекает, что при любом $T < T^*$ оператор осуществляет сжатое отображение множества $M(T)$ в себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха на множестве $M(T)$ существует и притом только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одно решение уравнения (15). Следовательно, решая (15) методом последовательных приближений

$$\vartheta_n(x,t) = \int_0^t\int_0^l K(x,\xi,\tau)\vartheta_{n-1}^2(\xi,\tau)d\xi d\tau - \alpha\int_0^t \vartheta_{n-1}^2(x,\tau)d\tau + \vartheta^0(x,t),$$

$$\vartheta_0 = 0,$$

мы однозначно находим функцию $\vartheta(x,t),$ затем по формуле (5) найдем функцию $f(t)$.

Литература:

1.Аблабеков, Б.С. Обратные задачи определения источника в нелинейном обобщенном уравнении Буссинеска [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.К.Курманбаева // Вестн. КНУ им. Ж.Баласагына. - 2011. - Спец. вып. - С. 250-252.

2.Аблабеков, Б.С. Приближенное решение краевой задачи для полулинейного псевдопараболического уравнения /Б.С. Аблабеков, З.А. Дурмонбаева// Евразийское научное объединение. –2018.Т.1. –№12(46). – С.3 –6.

3.Дурмонбаева, З.А. О разрешимости задачи Гурса и краевой задачи для нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска [Текст]/ Дурмонбаева З.А. //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. - Вып. 44 с. 156

4.Фураев В.З. , Шадрин Г. А. Вывод уравнения для свободной поверхности фильтрующейся жидкости в слое конечной глубины // Вычисл. матем. и матем. физика.—М.: Изд. МГПИ им. В. И. Ленина, 1982. - Т. 10. -С. 66-71 .

5.Фураев, В.З. О разрешимости в целом первой краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска /В.З.Фураев //Дифференциальные уравнения. -1983. -Т.19, №11. -С.2014-2015.

6.Furaev ,V.Z. Approximation of solutions to the boundary value problems for the generalized Boussinesq equation / V.Z. Furaev, A.I.Antonenko //Вестник ЮУрГУ,сер. «Математическое моделирование и программирование». 2017. Т.10, №4.С.145-150.

7.Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.:Наука, 1977.- 457с.

8.Дзекцер Е. С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод //ДАН СССР. - 1972.- Т. 202. - № 5, С. 1031-1033.