www.esa-conference.ru

Операторный подход к краевым задачам сопряжения

Коваль Карина Александровна, кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель;
МГИМО МИД России, Одинцовский филиал

Разработана и обоснована общая схема исследования операторными методами смешанных краевых задач сопряжения. Эта схема может быть применима к различным конфигурациям пристыкованных липшицевых областей.

Ключевые слова: *Формула Грина, краевая задача, слабое решение, липшицева граница.*

В данной работе вкратце описана общая схема решения смешанных краевых задач сопряжения. Эта схема также применима для спектральных и начально-краевых задач, причём для разных конфигураций областей с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски. Общая схема исследования основана на так называемой обобщённой формуле Грина для смешанных краевых задач, доказанной Копачевским Н.Д. (см.[1]).

В работе использованы следующие формулы Грина. В области $\Omega \subset R^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$ для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega), L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma\colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma), \gamma\eta := \eta|_\Gamma$, справедлива первая формула Грина для смешанных краевых задач:

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \qquad (1)$$

$$\eta, u \in \widehat{H}^1(\Omega), u - \Delta u \in \left(H^1(\Omega)\right)^*, \gamma_k\eta \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k), \partial_k u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_k).$$

Здесь символом $\langle \eta, u\rangle_H$ обозначено значение функционала $\eta \in H_-$ на элементе $u \in H_+$ для оснащения $H_- \hookrightarrow H \hookrightarrow H_+$ В формуле (1) следы функций $\gamma_k\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ продолжи́мы нулем с липшицевого куска границы Γ_k на всю $\Gamma = \partial\Omega$ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$. Пространство, которому принадлежат такие функции, обозначено символом $\widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (см. работы [1], [2]).

Во втором варианте формулы Грина (см. ниже) производные по внешней нормали продолжи́мы нулем в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$: $\partial_k u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$. Пространства таких функций обозначены $\breve{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Для этих функций справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \qquad (2)$$

$$\eta, u \in \breve{H}^1(\Omega), u - \Delta u \in \left(H^1(\Omega)\right)^*, \gamma_k\eta \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k), \partial_k u \in \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_k).$$

С использованием этих формул Грина в работе разработана общая схема исследования смешанных краевых задач сопряжения (см. [2]). Она также применима для спектральных, начально-краевых задач и для разных конфигураций областей (см. [2], [3]). Схема заключается в том, что решение неоднородной краевой задачи сопряжения разыскивается в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте — либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Сначала эта схема проверяется и подробно описывается (см. п. 1.2.3) на примере задачи сопряжения для конфигурации из трёх областей с двумя внутренними границами стыка. Необходимо найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j), j = 1,3$, что для них выполнены уравнения:

$u_j - \Delta u_j = f_j \ \left(\text{в } \Omega_j\right), j = \overline{1,3}$ (3)

внешние граничные условия Дирихле:

$\gamma_{jj} u_j = \varphi_j \ \left(\text{на } \Gamma_{jj}\right), j = \overline{1,3}$ (4)

и условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \ (5)$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \ (6)$$

где f_j - заданные функции в $\Omega_j, j = 1,3$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} - разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

В работе использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородности (заданные элементы) лишь в одном месте, т.е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. С помощью этого принципа получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (3)-(6), а также решение представлено через операторы вспомогательных краевых задач.

Общая схема состоит из четырех этапов. Слабое (вариационное) решение задачи (3)–(6) разыскивается в виде суммы

$$(u_1, u_2, u_3) = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}),$$

где $u = (u_{j1}, u_{j2}, u_{j3})$, $j = \overline{1,4}$, — слабые решения вспомогательных краевых задач.

Первый этап — вспомогательная задача Зарембы, у которой уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные:

$$u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \quad (7)$$

$$\partial_{21} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12});$$

$$u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2),\ \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \quad (8)$$

$$\partial_{12} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),\ \partial_{32} u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23});$$

$$u_{13} - \Delta u_{13} = 0 \ (\text{в } \Omega_3),\ \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 \ (\text{на } \Gamma_{33}), \quad (9)$$

$$\partial_{23} u_{13} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23});$$

С помощью соответствующей формулы Грина (см. (2)) дано определение слабого решения этой проблемы и на этой основе получен следующий результат.

Теорема 1. Каждая из задач Зарембы имеет единственное слабое решение тогда и только тогда, когда $\varphi_k \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{kk}), k = 1,2,3.$

Вторая вспомогательная задача — это задача Стеклова, где неоднородности остаются лишь в разрыве следов на границах стыка областей и задаются с учетом решения предыдущей вспомогательной задачи Зарембы:

$$u_{2k} - \Delta u_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ \gamma_{kk} u_{2k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \quad (10)$$

$$\gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \tilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, \quad (11)$$

$$\gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \tilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, \quad (12)$$

$$\partial_{32} u_{22} = -\partial_{23} u_{23} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}).$$

Здесь установлен следующий результат.

Теорема 2. Пусть в задаче (10)-(12) выполнены условия

$$\varphi_{21} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}), \qquad \varphi_{32} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{32}),$$

а также условия согласования:

$$\tilde{\varphi}_{21} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}), \qquad \tilde{\varphi}_{32} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{32}),$$

тогда задача Стеклова имеет единственное слабое решение.

Далее на третьем этапе рассматривается первая вспомогательная задача С. Крейна; в ней неоднородны лишь уравнения, а все граничные условия являются однородными:

$$u_{3k} - \Delta u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k),\ \gamma_{kk} u_{3k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}),\ \text{k} = \overline{1,3} \quad (13)$$

$$\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0,\ \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \quad (14)$$

$$\gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0,\ \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = 0 (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \quad (15)$$

Итогом рассмотрения этой задачи является следующий результат.

Теорема 3. Первая вспомогательная задача С.Крейна (13)-(15) имеет единственное слабое решение тогда и только тогда, когда

$f \in \left(H^1{}_{0,\Gamma}(\Omega)\right)^*$,

$H^1{}_{0,\Gamma}(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega),\ \gamma_{kk} u = 0\ (\text{на } \Gamma_{kk}),\ \gamma_{jk} u_k - \gamma_{kj} u_j = 0\ \left(\text{на } \Gamma_{jk}\right)\right\}$.

Это решение выражается формулой $u = A^{-1} f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1{}_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Последний четвёртый этап — вторая вспомогательная задача С. Крейна; здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана:

$$u_{4k} - \Delta u_{4k} = 0 \text{ (в } \Omega_k), \ \gamma_{kk} u_{4k} = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}), k = \overline{1,3} \quad (16)$$

$$\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \quad (17)$$

$$\gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0, \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = \psi_{32} \text{ (на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \quad (18)$$

С помощью соответствующей формулы Грина (см. (1)) доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Вторая вспомогательная задача С. Крейна (16)-(18) имеет единственное слабое решение тогда и только тогда, когда выполнены условия

$\psi_{21} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{21}), \qquad \psi_{32} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{32}).$

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (3)—(6) является следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование обобщённых формул Грина (1), (2) (см. [1]). Тогда задача сопряжения (3)—(6) имеет единственное слабое решение в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем 1—4. При этом её решение — сумма решений четырёх вспомогательных задач.

Эту схему можно применить к различным конфигурациям пристыкованных областей Ω_k в случае, когда области Ω_k разбиты на липшицевы куски с липшицевыми границами этих кусков. Также схема применима к спектральным и начально-краевым задачам сопряжения для нескольких пристыкованных областей (см. [4], [5]).

Литература:

1. Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина и ее приложения: монография / Симферополь ООО «Форма», 2016. – 180 с.

2. Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения / Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М.. — 2016. — Т. 61.— С. 67-102.

3. Радомирская К.А. Спектральные и начально-краевые задачи сопря- жения / Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2017. — Т. 63. — С. 316-339.

4. Радомирская К.А. О некоторых начально-краевых задачах сопряжения / Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. —№ 2 (35). — С. 72-96.

5. Радомирская К.А. Спектральные задачи сопряжения / Динамические системы, КФУ, Симферополь. — 2017. — Т. 7(35), №1. — С. 63-79.