EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
www.esa-conference.ru

Структура пространства-времени и ее связь со свойствами элементарных частиц

Попов Н. Н. Кошелев А.А.
Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва

Аннотация. *В работе устанавливается связь между явными и внутренними (скрытыми) симметриями шестимерного псевдоевклидова пространства сигнатуры (++ + − −−) и свойствами элементарных частиц. Скрытые симметрии выявляются за счет различных форм представления метрики псевдоевклидова пространства с помощью спиноров и гиперболических комплексных чисел. По возникающим скрытым группам симметрии пространства удается построить классификацию адронов, а также предсказать существование и количество таких сохраняющихся квантовых характеристик кварков, как цвет и аромат.*

Ключевые слова: *шестимерное псевдоевклидово пространство, скрытые группы движений метрики, четырехкомпонентные спиноры, гиперболические комплексные числа, гиперболические унитарные группы, законы сохранения гиперзаряда, изоспина, цвета, аромата.*

Введение

Как известно, математическое число измерений пространства в теории великого объединения элементарных частиц на основе структурной группы $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$, равно 11. При этом четыре измерения относятся к реальному физическому пространству-времени, а остальные семь к некоторому абстрактному пространству [1], в рамках которого можно ввести такие квантовые характеристики элементарных частиц, как изоспин, странность и т.д. Число измерений дополнительного абстрактного пространства может увеличиваться по мере открытий все новых квантовых характеристик. Такая схема развития теории довольно проста, но при этом возникает ощущение ее искусственности. Излагаемая в работе концепция может быть сведена к следующему положению: нужно найти такое пространство, претендующее на роль физического пространства-времени, чтобы группы симметрий его типичного касательного слоя как явные, так и скрытые, генерировали сохраняющиеся квантовые характеристики уже известных элементарных частиц. В качестве кандидата на роль реального физического пространства-времени в работе рассматривается шестимерное псевдориманово пространство сигнатуры $(+++---)$ с типичным касательным слоем в виде шестимерного псевдоевклидова пространства.

Задача заключается в обнаружении как явных, так и скрытых групп симметрий шестимерного псевдоевклидова пространства. Выявление таких групп симметрий достигается за счет различных форм представления псевдоевклидовой метрики шестимерного пространства. Это, в первую очередь, относится к спинорной форме представления [2], а также представления при помощи гиперболических комплексных чисел или, как их еще называют, двойных чисел [3-5].

Получаемая при таком представлении гиперболическая группа унитарной симметрии в некотором смысле близка к группе $SU(3)$, и по ней можно провести классификацию адронов аналогично тому, как это было сделано Гелл-Маном [6] на основе унитарной группы $SU(3)$. Более того, в шестимерном пространстве R_{33} существуют дополнительные скрытые группы гиперболической унитарной симметрии, оставляющие инвариантной метрику пространства. В случае кварковой модели эти группы предсказывают существование трех сохраняющихся квантовых характеристик цвета и от 6 до 12 сохраняющихся квантовых характеристик ароматов, в зависимости от того, имеет ли время выделенное направление или нет.

В параграфе 1 рассматривается вещественная и комплексная формы представления псевдоевклидовой метрики пространства R_{33} и находятся соответствующие явные и неявные группы симметрий пространства. Выявляется геометрическая природа изоспинового пространства. В параграфе 2 вводится алгебра гиперболических комплексных чисел и с их помощью строится представление метрики пространства R_{33} в трехмерном пространстве H^3 гиперболических комплексных чисел. Находятся гиперболические группы унитарной симметрии в H^3, оставляющие инвариантной метрику пространства R_{33}. В параграфе 3 кратко рассматривается применение полученных результатов.

1 Спинорное представление метрики пространства R_{33} и ее скрытые группы движений

Постулируется, что размерность физического пространства-времени равна 6, а ранг касательного псевдоевклидова пространства R_{33} в каждой точке многообразия равен 3. Не обсуждая причины такого выбора, которые станут понятны в дальнейшем, ниже приводится конструкция спинорного представления пространства R_{33}. Рассматриваются группы вещественных и невещественных (скрытых) движений метрики.

1.1 Псевдоевклидово пространство R_{33} как образ спинорного пространства.

Пусть задано псевдоевклидово пространство R_{33} и пусть η_{ij} — псевдоевклидова метрика пространства, т.е. $\eta_{ij} = \pm\delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, $\delta_{jj} = \pm 1$, знак (+) берется в случае, когда $j = 1,2,3$, знак (−) в остальных случаях. Квадрат интервала в R_{33} представляется в виде

$$s^2 = \eta_{kl}x^k x^l, k,l = 1,...,6, \qquad (1.1)$$

где $x = (x^1,...,x^6)$ — вектор в псевдоевклидовом пространстве R_{33}, по одинаковым верхним и нижним индексам подразумевается суммирование. Группа собственных движений метрики (1.1) пространства R_{33} задается группой собственных псевдоортогональных поворотов $SO(3,3)$.

Введем четырехмерное комплексное пространство C^4, элементами которого являются четырехкомпонентные комплексные векторы, называемые спинорами $\xi = (\xi^1,...,\xi^4)$, а само пространство C^4 — спинорным пространством [7].

Для любого вектора $x = (x^1,...,x^6) \in R_{33}$ найдется такой спинор $\xi = (\xi^1,...,\xi^4) \in C^4$, что будут выполняться следующие соотношения:

$$x^1 = \xi^1\xi^{\dot 2} + \xi^2\xi^{\dot 1}, \quad x^2 = \frac{\xi^1\xi^{\dot 2} - \xi^{\dot 1}\xi^2}{i}$$
$$x^3 = \xi^1\xi^{\dot 1} - \xi^2\xi^{\dot 2}, \quad x^4 = \xi^3\xi^{\dot 4} + \xi^3\xi^{\dot 4},$$
$$x^5 = \frac{\xi^3\xi^{\dot 4} - \xi^3\xi^{\dot 4}}{i}, \quad x^6 = \xi^3\xi^{\dot 3} - \xi^4\xi^{\dot 4}, \tag{1.2}$$

где $\xi^{\dot i}$ – комплексно сопряженная к ξ^i компонента спинора, i – мнимая единица.

Формулы (1.2) можно представить в более изящном виде. Для этого рассмотрим полную матричную алгебру $M(4,C)$ в спинорном пространстве C^4. Выберем в этой алгебре матрицы

$$\widehat{\sigma}^l = \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = 1,2,3,$$
$$\widehat{\sigma}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad k = 4,5,6 \tag{1.3}$$

,

где $\sigma^{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^{3,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрицы Паули. Матрицы

(1.3) образуют шестимерный базис в подалгебре L алгебры $M(4,C)$ – матрицы Паули. Матрицы (1.3) образуют шестимерный базис в подалгебре L алгебры $M(4,C)$. Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l - \widehat{\sigma}^l\widehat{\sigma}^k = 2i\widehat{\sigma}^m\varepsilon_{klm}, \tag{1.4}$$

где $klm = 1,2,3$ или $4,5,6$, ε_{klm} – полностью антисимметричный тензор,

$$\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l = 0 \tag{1.5}$$

если $k = 1,2,3$, $l = 4,5,6$,

$$\widehat{\sigma}^k\widehat{\sigma}^l + \widehat{\sigma}^l\widehat{\sigma}^k = 2\delta^{kl}p^m, \tag{1.6}$$

где p^m – двумерный ортогональный проектор в спинорном пространстве C^4, причем, если $k,l = 1,2,3$, то $m = 1$, если $k,l = 4,5,6$, то $m = 2$,

$p^1(C^4) = \{\xi \in C^4; \xi = (\xi^1,\xi^2,0,0)\}, p^2(C^4) = \{\xi \in C^4; \xi = (0,0,\xi^3,\xi^4)\}$.

Алгебра Ли, порождаемая базисом (1.3), согласно соотношениям (1.4), (1.5),

(1.6), приводима. Каждой паре $(\widehat{\sigma}^m, \xi) \in M(4,C) \otimes C^4$ можно сопоставить m-ую координату x^m вектора $x \in R_{33}$ по формуле

$$x^m = \langle \xi, \widehat{\sigma}^m\xi \rangle, m = 1,\dots,6, \tag{1.7}$$

где $\langle,\rangle$ – скалярное произведение в C^4, задаваемое соотношением $\langle \xi,\eta \rangle = \delta_{\dot\nu\mu}\xi^{\dot\nu}\eta^\mu$.

Нетрудно заметить, что представления (1.2) и (1.7) эквивалентны. Таким образом, вещественные координаты векторов псевдоевклидова пространства R_{33} можно представить как средние значения эрмитовых операторов вида (1.3) на спинорах пространства C^4. Обратно, если задан вектор $x \in R_{33}$ с координатами $(x^1,\dots,x^6)$, то существует спинор $\xi \in C^4$, определяемый с точностью до унитарной эквивалентности относительно группы $SU(2) \otimes U(1) \oplus SU(2) \otimes U(1)$, такой, что выполняется соотношение (1.7). Действительно, пространство C^4 можно представить относительно действующей в нем подалгебры операторов L, задаваемой базисными элементами вида (1.3), в виде прямой суммы инвариантных подпространств

$C^4 = p^1(C^4) + p^2(C^4)$,

где $p^1(C^4)$ – двумерное спинорное пространство, $p^2(C^4)$ – двумерное пространство изоспина.

Представление унитарной группы с алгеброй Ли L, действующей в пространстве C^4, вполне приводимо и может быть выражено в виде прямой суммы неприводимых подпредставлений

$$U = SU(2) \otimes U(1) \oplus SU(2) \otimes U(1).$$

Рассмотрим применение полученных результатов для случая классификации элементарных частиц.

1.2 Группы $U(1) \oplus U(1)$ и $SU(2) \oplus SU(2)$

Двухпараметрическая группа унитарных преобразований $U(1) \oplus U(1)$, имеющая представление в C^4 в виде унитарных матриц

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

оставляет инвариантными правые части соотношений (1.2), т.е. координаты векторов из R_{33} при таких преобразованиях остаются неизменными. Следовательно, и сама метрика [1.1] пространства R_{33} остается инвариантной. Элементы (1.8) группы $U(1) \oplus U(1)$ представляют собой движения псевдоевклидовой метрики пространства R_{33}. Группа $U(1) \oplus U(1)$ генерирует два закона сохранения. Первый закон сохранения, порождаемый оператором $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi_1}$, можно интерпретировать

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

как закон сохранения электрического заряда. Второй закон, порождаемый генератором группы $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi_2}$, будем интерпретировать как закон сохранения гиперзаряда.

Появление закона сохранения гиперзаряда связано со скрытыми симметриями в трехмерном временном подпространстве, которое кратко будем называть изопространством. Перейдем теперь к рассмотрению более сложной унитарной группы симметрии $SU(2) \oplus SU(2)$. Как было показано выше, шестимерная алгебра Ли L над полем вещественных чисел, порождаемая базисными элементами (1.3), может быть разложена на сумму двух неприводимых представлений. Каждое из неприводимых представлений соответствует группе $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц U размерности 2, т.е. $U^+U = 1$, $detU = 1$. В случае первого неприводимого представления такие матрицы могут быть представлены в виде $U = e^{ia_k\sigma_k}$, $k = 1,2,3$, где σ_k – эрмитовы матрицы Паули, а a_k – произвольные вещественные числа. Эти матрицы реализуют тождественное представление размерности 2 в двумерном спиновом пространстве $p^1(C^4)$ с элементами $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, натянутыми на два базисных спинора $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. В случае второго неприводимого представления получим аналогичную группу унитарных унимодулярных матриц $U = e^{ia_l\sigma_l}$, $l = 4,5,6$, где в качестве генераторов σ_l выступают те же самые матрицы Паули согласно соотношению (1.3). Эти матрицы реализуют группы размерности 2 в двумерном изоспиновом пространстве $p^2(C^4)$ с элементами $\begin{pmatrix}\xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}$, натянутыми на два базисных спинора $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Итак, изопространство – это спиновое пространство, связанное с трехмерным временным подпространством. Следовательно, такая важная характеристика элементарных частиц, как изоспин, имеет чисто геометрическую природу, и его закон сохранения связан с инвариантностью метрики шестимерного пространства R_{33} относительно группы вращений в трехмерном временном подпространстве.

Отметим, что введенные законы сохранения гиперзаряда и изоспина могут нарушаться в случае слабых взаимодействий и не нарушаются в случае сильных взаимодействий. Это обстоятельство связано с тем фактом, что в трехмерном временном подпространстве, с которым связано появление таких квантовых характеристик, как гиперзаряд и изоспин, выделение направления течения времени приводит к нарушению сферической симметрии. Скорости протекания процессов, обусловленных слабым и сильным взаимодействиями, отличаются на 15 порядков друг от друга. То есть слабые процессы - это чрезвычайно медленные процессы, протекающие за время порядка 10^{-9}с, тогда как сильные процессы протекают за время порядка 10^{-24}с. Это приводит к тому, что в случае сильных взаимодействий, в силу их практически мгновенной реализации, нарушение сферической симметрии не успевает произойти, в то время как при значительно более медленном протекании процессов слабого взаимодействия нарушение сферической симметрии во временном подпространстве не может остаться незамеченным, что и приводит к нарушениям законов сохранения гиперзаряда и изоспина.

Тождественное представление группы $SU(2) \oplus SU(2)$ описывает пары элементарных частиц, имеющих полуцелые спин $J = \frac{1}{2}$ и изоспин $I = \frac{1}{2}$. Если в качестве базисных спиноров в изоспиновом пространстве выбрать соответствующие пары частиц, например, для пары протон p и нейтрон n положить, по определению, $p = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $n = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, а матрицы Паули $\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6$, действующие в изоспиновом пространстве, обозначить как τ_1,τ_2,τ_3 соответственно, то оператор $\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$ переводит нейтрон в протон, а оператор $\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2)$ переводит протон в нейтрон. Точно так же можно описать изодублет каскадных гиперонов (Ξ^0,Ξ^-), имеющих спин $J = \frac{1}{2}$. Заметим, что каждое из двух слагаемых, входящих в прямую сумму группы $SU(2) \oplus SU(2)$, может иметь свое независимое представление. Размерность этих представлений определяется параметрами J и I. Если частицы обычные, то есть имеют нулевую странность, то J и I одновременно целые или полуцелые. К числу обычных частиц можно отнести триплет π-мезонов π^-,π^+,π^0 со спином $J = 0$, изоспином $I = 1$. В трехмерном временном пространстве изотопических вращений можно ввести базис $\pi_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ \pi_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \pi_3 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ действительных псевдоскалярных полей, связанных с заряженными пионами π^+, π^- формулами $\pi^-_+ = (\pi_1 \pm i\pi_2)\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pi^0 = \pi_3$. Тогда изотопическому триплету вещественных полей (π_1,π_2,π_3) в матричном базисе τ_1,τ_2,τ_3 сопоставляется матрица вида

$$\{\pi_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1\pi_1 + \tau_2\pi_2 + \tau_3\pi_3) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pi_3 & \pi_1 - i\pi_2\\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+\\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Итак, псевдоскалярные π-мезоны в изотопическом формализме можно задать в виде двумерных матриц (1.9). Вообще любой изотриплет частиц, т.е. частиц, имеющих изоспин $I = 1$ и произвольный спин J, можно задать матрицей вида (1.9). Например, изотриплет векторных мезонов ρ^+,ρ^-,ρ^0 с параметрами $J = 1$, $I = 1$ задается в виде

$$\{\rho_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 & \rho^+\\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0\end{pmatrix}.$$

Изотриплет странных гиперонов $\Sigma^+,\Sigma^-,\Sigma^0$ спина $J=\frac{1}{2}$ и изоспина $I=1$ задается в виде

$$\{\Sigma_{\alpha\beta}\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+\\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0\end{pmatrix}.$$

Итак, по различным представлениям группы $SU(2)$, действующей в изопространстве, можно осуществить простую классификацию адронов, разбивая их на группы частиц со схожими физическими характеристиками. Впрочем, это хорошо известные факты. Для нас важно отметить, что изначально группа $SU(2)$ появилась в физике элементарных частиц как группа преобразований, переводящих друг в друга различные пары состояний (например, p и n) в абстрактном изотопическом пространстве. Здесь же установлено, что эта группа тесно связана со скрытыми движениями метрики псевдоевклидова пространства R_{33}.

2 Гиперболические комплексные числа и представление метрики псевдоевклидова пространства R_{33}

Гиперболические комплексные числа или, как их принято называть, двойные числа, изучались в работах [3-5], в основном в связи с исследованиями пространств типа Бервальда-Моора. В настоящей работе эти числа будут использованы для изучения свойств пространства R_{33} и выявления скрытых групп симметрий.

2.1 Алгебра и геометрия гиперболических комплексных чисел.

Определим алгебру гиперболических комплексных чисел H как 2-мерный R-модуль с парой образующих {1, j} и таблицей умножения

	1	j
1	1	j
j	j	1

(2.1)

Элементы $h\in H$ будем записывать в виде $h=1x+jt$, где $x,t\in R$, а j – мнимая единица в алгебре H. По аналогии с обычными комплексными числами, которые уместно было бы теперь называть эллиптическими комплексными числами, вещественное число $Re\,h=x$ называется вещественной частью гиперболического комплексного числа h, а вещественное число $Im\,h=t$ называется мнимой частью числа h. В этом есть глубокий смысл, так как, если x интерпретировать как вещественную пространственную координату трехмерного вещественного физического пространства, а t как мнимую временную координату трехмерного временного подпространства, то в силу реальной ненаблюдаемости времени, оно входит в определение числа h в виде произведения на мнимую единицу.

Алгебра гиперболических комплексных чисел не образует числового поля, поскольку содержит делители нуля. В алгебре H определена инволютивная операция комплексного спряжения: $h=x+jt\to\overline{h}=x-jt$. Геометрически эта операция описывает отражение гиперболической плоскости относительно оси $Im\,h=0$.

Алгебра гиперболических комплексных чисел индуцирует на плоскости двумерную псевдоевклидову геометрию с метрикой $\eta_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Псевдонорма и модуль элемента $h\in H$ определяются, соответственно, формулами $|h|^2=h\,\overline{h}$, $|h|=\sqrt{||h|^2|}$.

Введенные псевдонорма и модуль не удовлетворяют евклидову свойству нормы: $|h|=0\Rightarrow h\equiv 0$. Это обстоятельство связано с псевдоевклидовой геометрией гиперболических комплексных чисел, а точнее, с наличием в алгебре H вырожденных

Рассмотрим n-мерное пространство гиперболических комплексных чисел H^n. В пространстве H^n введем скалярное произведение векторов. Если $h=(h^1,...,h^n)$ и $g=(g^1,...,g^n)$ два вектора из H^n, то скалярное произведение задается билинейной формой

$$\langle h,g\rangle=\overline{h^1}g^1,...,\overline{h^n}g^n. \quad (2.2)$$

Билинейная форма (2.2) не элементов-делителей нуля, для которых выполняется условие $h\in H$, $|h|=0$.является положительно определенной. В случае пространства H^3 имеем

$$\langle h,h\rangle=\overline{h^1}h^1+\overline{h^2}h^2+\overline{h^3}h^3. \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что $h^k=x^k+jt^k$, $k=1,2,3$, из (2.3), согласно таблице умножения (2.1), получаем

$$\langle h,h\rangle=x_1^2+x_2^2+x_3^2-t_1^2-t_2^2-t_3^2, \quad (2.4)$$

т.е. скалярное произведение гиперболических комплексных чисел из H^3 задает квадратичную билинейную форму (псевдоевклидову метрику) в пространстве R_{33}, согласно соотношению (2.4). Перейдем теперь к рассмотрению групп симметрий квадратичной билинейной формы (2.3).

2.2 Гиперболические группы унитарной симметрии и их представления.

Метрика шестимерного псевдоевклидова пространства R_{33} инвариантна относительно ряда скрытых групп симметрий, возникающих в результате представления метрики в гиперболическом пространстве H^3 согласно формулам (2.3), (2.4).

Рассмотрим унитарную гиперболическую группу $U(1,H^3)$, действующую в пространстве H^3. Это трехпараметрическая группа H–унитарных матриц вида

$$U=\begin{pmatrix}e^{j\phi_1}&0&0\\0&e^{j\phi_2}&0\\0&0&e^{j\phi_3}\end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

оставляющих инвариантной билинейную форму (2.3). Эрмитово сопряженная матрица

$$U^+ = \begin{pmatrix} e^{-j\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j\phi_3} \end{pmatrix}$$

является обратной к U и $UU^+ = 1$. Алгебра Ли этой группы коммутативна и ее базис задается тремя элементами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тождественное представление (2.5) группы $U(1,H^3)$ приводимо и разлагается в прямую сумму неприводимых представлений группы $U(1,H^3)$, действующих в инвариантных одномерных подпространствах H,

$$U(1,H^3) = U(1,H) \oplus U(1,H) \oplus U(1,H).$$

Генераторы этой группы индуцируют три закона сохранения. Забегая немного вперед, отметим, что эти законы сохранения связаны с тремя цветовыми квантовыми характеристиками кварков. Сами же унитарные преобразования из группы $U(1,H)$ в пространстве H соответствуют преобразованиям Лоренца в псевдоевклидовом подпространстве R_{33}.

Рассмотрим теперь гиперболическую группу унитарных матриц $SU(2,H)$, действующую в трехмерном гиперболическом пространстве H^3.

Группа $SU(2,H)$ – группа гиперболических унитарных унимодулярных матриц U размерности $2 \otimes 2$, удовлетворяющих условиям $U^+U = 1$, $|detU| = 1$. Такая матрица может быть представлена в виде $U = e^{ja_k\sigma_k}$, $U^+ = e^{-ja_k\sigma_k}$, где σ_k, $k = 1,2,3$, – эрмитовы бесследовые матрицы, $\sigma_k^+ = \sigma_k$, имеющие вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

a_k, $k = 1,2,3$, – произвольные вещественные числа.

Матрицы (2.6) образуют трехмерный базис в алгебре Ли группы $SU(2,H)$ и отличаются от матриц Паули лишь заменой мнимой единицы i на гиперболическую мнимую единицу j. Базисные элементы (2.6) алгебры Ли удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\sigma_k,\sigma_l] = 2j\kappa_{klm}\sigma_m,$$

где κ_{klm} – тензор третьего ранга, принимающий значения $\kappa_{123} = 1, \kappa_{132} = 1, \kappa_{231} = 1, \kappa_{312} = -1, \kappa_{213} = -1, \kappa_{321} = -1$.

Структурные константы алгебры Ли группы $SU(2,H)$ совпадают со структурными константами алгебры Ли группы $SU(2)$ с точностью до знака.

Разобъем компоненты шестимерного вектора $x = (x^1,x^2,x^3,t^1,t^2,t^3) \in R_{33}$ на группы, содержащие по три компоненты, такие, чтобы среди них не могли встречаться все три компоненты одного вида либо (x^1,x^2,x^3), либо (t^1,t^2,t^3). Всего таких троек может быть двенадцать. Каждой из них можно подобрать среди одиннадцати оставшихся сопряженную тройку координат таким образом, чтобы в этих двух тройках не было бы общих элементов. Например, если взять тройку (x^1,x^3,t^2), то сопряженной ей тройкой будет (x^2,t^1,t^3). Итак, имеется всего шесть сопряженных между собой пар троек. Каждой тройке (x^k,x^l,t^m), $k = 1,2,3$ сопоставим матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} x^k & x^l - jt^m \\ x^l + jt^m & -x^k \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

а сопряженной тройке (x^n,t^p,t^q), $n,p,q = 1,2,3$, причем $n \neq k,l$, $m \neq p,q$, сопоставим матрицу

$$Y^C = \begin{pmatrix} t^p & t^q - jx^n \\ t^q + jx^n & -t^p \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$detY^C - detY = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2. \quad (2.9)$$

Для любых гиперболических унитарных матриц $U_1,U_2 \in SU(2,H)$ независимые унитарные преобразования

$$Y' = U_1^+ Y U_1, Y^{C\prime} = U_2^+ Y^C U_2$$

оставляют инвариантной билинейную квадратичную форму в правой части соотношения (2.9) в силу равенства

$$detY^{C\prime} - detY' = detY^C - detY.$$

Итак, унитарные преобразования над парами сопряженных матриц Y и Y^C из группы $SU(2,H) \oplus SU(2,H)$ соответствуют псевдоортогональным преобразованиям в пространстве R_{33}, оставляющим инвариантной псевдоевклидову метрику. Существует всего шесть групп такого вида, причем каждое представление таких групп разлагается в прямую сумму двух неприводимых сопряженных представлений, действующих в трехмерных подпространствах шестимерного пространствавремени. Этим двенадцати представлениям гиперболических унитарных групп симметрий должны соответствовать двенадцать законов сохранения. Забегая вперед отметим, что сохраняющиеся квантовые характеристики можно интерпретировать как ароматы кварков. То, что двенадцать представлений шести групп разбиваются на пары неприводимых сопряженных представлений, означает, что ароматы кварков появляются парами (u,d), (c,s), (b,t) и т.д. Отметим, что полученный результат опирается на предположение о том, что временное подпространство изотропно, т.е. не существует выделенного направления течения времени. Однако, если это не так, и существует выделенная временная ось, например, t_1, то сферическая симметрия во временном подпространстве нарушается, и сохраняется лишь осевая симметрия. Тогда существует всего три пары сопряженных троек

(t_1,x_1,x_2)	(t_1,x_1,x_3)	(t_1,x_2,x_3)
(t_2,t_3,x_3)	(t_2,t_3,x_2)	(t_2,t_3,x_1)

каждой паре троек соответствует пара сопряженных матриц вида (2.7) и (2.8), индуцирующих шесть законов сохранения ароматов кварков. Отметим, что в настоящий момент уже известны шесть ароматов. Поэтому, если наше физическое пространство-время шестимерно и имеет выделенную временную ось, то уже найденными шестью видами кварков, различающимися своими ароматами, исчерпывается весь набор кварков без учета цвета.

Рассмотрим гиперболическую группу унитарной симметрии $SU(3,H)$. Группа Ли $SU(3,H)$ – это группа трехмерных унитарных унимодулярных матриц, имеющих восемь независимых параметров. Элементы группы $U \in SU(3,H)$ оставляют инвариантной квадратичную форму

$h^1h^1 + h^2h^2 + h^3h^3,$

где $(h^1,h^2,h^3) \in H^3$. Т.е., если $h' = Uh, U \in SU(3,H)$, то

$$h^1h^{1'} + h^2h^{2'} + h^3\overline{h^{3'}} = h^1h^1 + h^2\overline{h^2} + h^3h^3.$$

Алгебра Ли группы $SU(3,H)$ задается восемью базисными элементами в виде матриц типа Гелл-Манна [6] λ_m, $m = 1,...,8$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad ,(2.10)$$

Матрицы (2.10) отличаются от матриц Гелл-Манна лишь заменой мнимой единицы i на гиперболическую мнимую единицу j.

Базисные элементы (2.10) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\frac{1}{2}\lambda_k, \frac{1}{2}\lambda_l] = jf_{klm}\frac{1}{2}\lambda_m,$$

где $f_{123} = 1, f_{147} = \frac{1}{2}, f_{156} = -\frac{1}{2}, f_{257} = \frac{1}{2}, f_{246} = \frac{1}{2}, f_{345} = -\frac{1}{2}, f_{367} = \frac{1}{2}$ и т.д. являются структурными константами алгебры Ли группы $SU(3,H)$. Эти структурные константы совпадают со структурными константами алгебры Гелл-Манна с точностью до знака. Нас будет интересовать представление $SU(3,H)$ размерности 8. Вообще говоря, восьмимерное представление задается матрицами размерности $8 \otimes 8$ в восьмимерном вещественном линейном пространстве R_8, натянутом на базисные восьмикомпонентные векторы $e_1 = (1,0,...,0),...,e_8 = (0,...,0,1)$. Любой восьмикомпонентный вектор $x = (x^1,...,x^8)$ в этом базисе записывается в виде $x = x^k e_k$, где по повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование. Если в качестве базиса выбрать матричный базис (2.10), то относительно этого базиса вектор $x = (x^1,...,x^8)$ можно представить в виде унитарной матрицы с нулевым следом:

$$\{x_{\alpha\beta}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^k\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}x^8 & x^1 - jx^2 & x^4 - jx^5 \\ x^1 + jx^2 & -x^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}x^8 & x^6 - jx^7 \\ x^4 + jx^5 & x^6 + jx^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x^8 \end{pmatrix}. \qquad (2.11)$$

Итак, в этом разделе были кратко описаны некоторые из H-унитарных групп симметрий, представляющие собой скрытые или внутренние симметрии псевдоевклидова пространства R_{33}. Перейдем теперь к применению полученных результатов в случае расширенной классификации адронов, построению кварковой модели барионов и мезонов.

3 Скрытые группы симметрий пространства R_{33} и свойства элементарных частиц.

3.1 Классификация адронов по восьмимерному представлению H-унитарной группы $SU(3,H)$.

Начнем рассмотрение с классификации барионов спина $J = \frac{1}{2}$. К этой группе относятся: изодублет нуклонов p, n, изодублет каскадных гиперонов Ξ^-, Ξ^0, изотриплет гиперонов $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$ и изосинглет Λ^0. Таким образом, имеется всего восемь частиц, образующих 8-вектор действительных полей. Формально свяжем компоненты матрицы (2.11) с компонентами 8-вектора действительных полей по следующим формулам:

$x^3 = \Sigma^0; \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^1 - jx^2) = \Sigma^+; \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^1 + jx^2) = \Sigma^-; \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^4 - jx^5) = p,$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^4 + jx^5) = \Xi^-; \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^6 - jx^7) = n, \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^6 + jx^7) = \Xi^0; x^8 = \Lambda^0.$

Тогда матрица (2.11) принимает вид:

$$\{\mathfrak{B}_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, 8 отдельно взятых барионов с одинаковым спином удается сгруппировать в один унитарный мультиплет. Точно так же 8 псевдоскалярных мезонов с $J = 0$ – изотриплет π^-, π^0, π^+, два изодублета странных K-мезонов

K^+, K^0 и K^-, $\overline{K^0}$ и изосинглет η – могут быть сгруппированы в один унитарный мультиплет

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\{P_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \overline{K^0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}.$$

Отметим, что классификация адронов по восьмимерному представлению группы $SU(3,H)$ полностью совпадает с аналогичной классификацией, полученной Гелл-Манном на основании использования группы $SU(3)$, так называемый восьмеричный путь. На наш взгляд, преимущество использования группы $SU(3,H)$ заключается в ее тесной связи со скрытыми или внутренними симметриями пространства R_{33}. Отметим также, что такая важная квантовая характеристика адронов, как изоспин, обязана своим появлением трехмерности временного подпространства в пространстве R_{33}.

3.2 Кварковая модель и адроны

В предыдущем параграфе были рассмотрены гиперболические унитарные группы скрытых симметрий $U(1,H)$ и $SU(2,H)$ псевдоевклидова пространства $R(3,3)$. Как было отмечено выше, этим группам соответствуют три закона сохранения цветовых квантовых характеристик и двенадцать законов сохранения ароматов. Эти сохраняющиеся квантовые характеристики относятся к кваркам - гипотетическим частицам, преобразующимся по спинорному представлению группы $SU(3,H)$ размерности 3. Цвет и аромат - это квантовые характеристики отдельно взятого кварка. Таким образом, существует всего 36 типов кварков, различающихся между собой по цвету и аромату, при условии, что трехмерное временное пространство изотропно, и 18 типов кварков в случае анизотропности.

В настоящее время зарегистрированы кварки шести ароматов и трех цветов, среди которых выделяются кварки трех ароматов u,d,s, каждый из которых может находиться в одном из трех цветовых состояний. Квантовые характеристики этих кварков (Q - электрический заряд, Y - гиперзаряд, J - спин, I - изоспин, I_3 проекция изоспина) задаются следующей таблицей:

	Q	Y	J	I	I_3
U	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
D	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
S	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0

Если обозначить символами q, $\bar{q}$ кварк и антикварк и ввести символы q_1,q_2,q_3 вместо символов u,d,s, то мезоны можно задать следующей формулой: $M = \bar{q}_k q_l, k,l = 1,2,3$. Полное число комбинаций 3 Ч 3 = 9 можно разбить на октет и синглет согласно формуле:

$$\{\overline{q_\alpha} \times q^\beta\} = (\overline{q_\alpha} q^\beta - \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta \overline{q_\gamma} q^\gamma) + \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta \overline{q_\gamma} q^\gamma,$$

$$(\overline{u}, \overline{d}, \overline{s}) \times \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & \overline{d}u & \overline{s}u \\ \overline{u}d & D_2 & \overline{s}d \\ \overline{u}s & \overline{d}s & D_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(\overline{u}u + \overline{d}d + \overline{s}s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \tfrac{1}{2}\overline{q}\lambda_3 q + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\overline{q}\lambda_8 q, \quad D_2 = -\tfrac{1}{2}\overline{q}\lambda_3 q + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\overline{q}\lambda_8 q, \quad D_3 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{q}\lambda_8 q. \qquad (3.1)$$

Отметим, что матрицы λ_3 и λ_8 полностью совпадают в группах $SU(3)$ и $SU(3,H)$, поэтому разложение (3.1) является общим для этих групп. Учитывая, что $D_1 = \frac{1}{2}(\overline{u}u - \overline{d}d) + \frac{1}{6}(\overline{u}u + \overline{d}d - 2\overline{s}s)$, $D_2 = -\frac{1}{2}(\overline{u}u - \overline{d}d) + \frac{1}{6}(\overline{u}u + \overline{d}d - 2\overline{s}s)$, $D_3 = -\frac{1}{3}(u\overline{u} + dd - 2ss)$, бесследовую матрицу из (3.1) можно отождествить с октетом мезонов с нулевым спином $J = 0$, при этом $\pi^- = \bar{u}d$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u} - d\overline{d})$, $K^- = \overline{u}s$, $K^+ = \overline{s}u$, $K^0 = d\overline{s}$, $\overline{K^0} = s\overline{d}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(\overline{u}u + \overline{d}d - 2\overline{s}s)$,

что приводит к совпадению двух матриц:

$$\begin{pmatrix} D_1 & \overline{d}u & \overline{s}u \\ \overline{u}d & D_2 & \overline{s}d \\ \overline{u}s & \overline{d}s & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \overline{K^0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно построить нонет векторных мезонов с $J = 1$, если положить $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{u}u - \overline{d}d)$, $\rho^+ = \overline{d}u$, $\rho^- = \overline{u}d$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{u}u + \overline{d}d)$, $K^{*+} = \overline{s}u$, $K^{*-} = \overline{u}s$, $K^{*0} = \overline{s}d$, $\overline{K^{*0}} = \overline{d}s$, $\phi = \overline{s}s$:

$$\begin{pmatrix} \overline{u}u & \overline{d}u & \overline{s}u \\ \overline{u}d & \overline{d}d & \overline{s}d \\ \overline{u}s & \overline{d}s & \overline{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & K^{*0} \\ K^{*-} & \overline{K^{*0}} & \phi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при построении мезонов цвет кварков не имеет никакого значения. Однако, при построении барионов это уже не так. Так, например, декуплет барионных резонансов со спином $J = \frac{3}{2}$

$\Delta^- \; \Delta^0 \; \Delta^+ \; \Delta^{++}$

$\Sigma^{*-} \; \Sigma^{*0} \; \Sigma^{*+}$

$\Xi^{*-} \; \Xi^{*0}$

Ω^-

можно представить в кварковой модели в следующем виде:
ddd udd uud uuu
sdd sud suu
ssd ssu
sss

Представленные диаграммы являются графическими изображениями базиса представления группы $SU(3,H)$ в плоскости двух параметров проекции изотопического спина I_3 по оси абсцисс и гиперзаряда Y по оси ординат. То, что в каждой из вершин треугольника находятся по три кварка с одинаковым ароматом, накладывает требования в силу принципа Паули о различных цветовых характеристиках, приписываемых этим кваркам.

Заключение

В излагаемой работе удалось обнаружить связь между скрытыми симметриями шестимерного псевдоевклидова пространства R_{33} и квантовыми характеристиками адронов, такими как электрический заряд, гиперзаряд, спин, изоспин. В случае кварковой модели адронов удалось связать скрытые симметрии пространства R_{33} с сохраняющимися квантовыми характеристиками кварков такими, как цвет и аромат.

Полученные результаты представляют собой основу для построения теории великого объединения элементарных частиц на базе шестимерного пространствавремени, а не на базе 11-мерного абстрактного пространства. Также эти результаты могут лечь в основу нового направления теоретических исследований свойств элементарных частиц с помощью изучения геометрических свойств пространства R_{33}.

Литература:

1. Виттен Е. Nucl. Phys, 1981, B 186, 412.
2. Попов Н. Н. О корреляции групп симметрии шестимерного псевдоевклидова пространства и квантовых характеристик элементарных частиц. Евразийское Научное Объединение ЕНО "Перспективные напр разв совр науки" 37 межд науч конф. Москва № 3 (37, март 2018).
3. Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 13, 2010, с.78-127. https://arxiv.org/pdf/1502.06985.pdf.
4. Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h-голоморфные функции двойной переменной и их приложения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 13, 2010, с.44-77.
5. Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(19), т. 10, 2013, с.86-161. https://arxiv.org/pdf/1502.06985.pdf.
6. М.Гелл-Манн, А.Розенфельд, Дж.Чу. Сильно взаимодействующие частицы,УФН, 1964, т.83, в.4.
7. Рашевский П.К. У.М.Н. т.Х, 2(64), 1955.