www.esa-conference.ru

Алгебра и геометрия вещественных биномов

Кокотов Ю.А., доктор химических наук
Санкт-Петербург, Россия

Рассматриваются алгебра и геометрия вещественных биномов, создающие новые возможности использования вещественной переменной. Преобразования точек вещественной плоскости рассматриваются через действия с вещественными биномами, аналогично преобразованиям точек комплексной плоскости, являющимися действиями с комплексными биномами.

А.Общие сведения. Вещественные биномы.

Биномы -простейшие полиномы, состоящие из двух одночленов. По разным причинам они могут рассматриваться и как **самостоятельные алгебраические объекты**, образованные двумя числами или символами, различающимися по смыслу (например, абсциссой и ординатой системы координат). Для них могут быть определены алгебраические операции, результаты которых вновь представляются в **виде бинома,** образующие алгебру вещественных биномов.

Комплексные числа как биномы.

В современной математике широко используются «комплексные числа». При этом «числами» (что, конечно, странно) называют «символы» вида $a+bi$ (a и b –буквы означающие произвольные вещественные числа, i-мнимый оператор умножения). Для этих «символов» формулируются свои правила алгебраических действий. При этом обычно не обращают внимания на то, что символ $a+bi$ («комплексное число») является **биномом**, образованным двумя видами чисел-вещественным и мнимым (это мимоходом отмечено в [1]). Биномами являются и другие виды «чисел», используемых в математике -дуальные и двойные числа.

Алгебраические действия с любыми биномами выполняются по общим алгебраическим правилам, но с последующим учетом свойств **операторов умножения** («числа i» или других, особых чисел, позволяющих превратить результат в бином). Эти действия формулируются как некие самостоятельные алгоритмы.

Известно, что алгоритмы действий с комплексными числами могут формулироваться и без использования мнимых чисел-**аксиоматически,** как операции с **парами вещественных чисел**, производимые по специальным правилам умножения (аксиомы умножения «пар чисел»

. 3) Числа и биномы в различных «алгебрах». Единичный оператор.

Умножение биномов. Модификации умножения.

Используемые в математике варианты собственно чисел полезно рассматривать в виде произведения **абсолютного значения (модуля) числа на единичный множитель -оператор умножения данного вида чисел.**

Единичные множители характеризуют принадлежность чисел к отличающимся друг от друга числовым множествам и определяют алгоритмы действий с ними.

В математике рассматривались следующие «комплексные» биномы:

1)обычные комплексные числа вида $a \pm bi$; i^2=-1;

2)дуальные числа, $a \pm b\varepsilon$, ε^2= 0.

3)двойные числа, $a \pm bE$, E^2=1.

Все три варианта «комплексных чисел» имеют форму бинома, образованного вещественным числом и неким числом «другой природы». Очевидно, что к ним можно добавить биномы только из вещественных чисел.

Алгебра комплексных чисел не придает знаку суммирования составляющих бинома смысл алгебраического действия. Считается, что бином- условная форма записи –общий символ комплексного числа. Подчеркивается, что для этих чисел не имеют смысла понятия «меньше» и «больше». При действиях с комплексными числами вещественные и мнимые составляющие суммируются отдельно, как разные по смыслу величины. В результате всегда вновь образуется бином.

Сравним алгоритмы умножения разных вариантов алгебраических биномов друг на друга (по обычным алгебраическим правилам), записывая числа в форме произведения модуля на единичный оператор умножения (κ -у первого члена и t- у второго члена биномов – сомножителей).

Запишем произведение биномов как:

$$(|a_1|\kappa + |b_1|t)(|a_2|\kappa + |b_2|t) = |a_1 a_2|\kappa^2 + |b_1 b_2|t^2 + (|a_1 b_2| + |a_2 b_1|)t\kappa$$

Для упрощения примем, что $\kappa t = t\kappa$, и что κ=1- **единичный символ положительного** числа. Тогда результаты умножения определяются только свойствами одного особого числа (оператора умножения) t.

1)если t =1 и t^2=1 получаем произведение двух вещественных биномов- в виде четырех члена, который может быть преобразован в бином аксиоматически:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) = A + B$$

2) Если t=-1 (единичный множитель отрицательных чисел) и t^2=1, получаем правило умножения друг на друга вещественных алгебраических биномов-разностей с естественным образованием бинома:

$$(a_1 + b_1 t)(a_2 + b_2 t) = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = A - B;$$

При этом число (-1) рассматривается как оператор умножения, изменивший алгоритм умножения.

3) Если $t= i$ -«обычное «мнимое число и $i^2=-1$, получаем алгоритм умножения «обычных» комплексных чисел:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i=A+Bi$$

4) Если $t=\varepsilon$ и $\varepsilon^2=0$, то получаем алгоритм умножения **дуальных** чисел:

$$(a_1+b_1\varepsilon)(a_2+b_2\varepsilon)=(a_1a_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\varepsilon=A+B\varepsilon;$$

5) Если $t=E$ и $E^2=1$,то получаем алгоритм умножения **двойных** чисел:

$$(a_1+b_1E)(a_2+b_2E)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)E=A+BE$$

Изменение свойств **оператора умножения** *t,* меняет результаты умножения и приводит к различным видам вещественных и комплексных биномов («комплексных чисел»).

Отсюда возникают и правила всех других действий с биномами разного вида: возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования.

Рассматривая далее вещественные биномы мы сравниваем их с комплексными числами (биномами) с оператором умножения *i.*

4) Характеристики бинома. Одночлены.

Конечно, вещественные биномы рассматривались в математике. Ряд формул алгебры, тригонометрии, геометрии, теории вероятностей может быть описан через действия с биномами, а их результаты представлены в виде бинома. Но они не всегда рассматривались как особые действия.

Вещественные (не комплексные) алгебраические биномы, образованы двумя разными «буквами», символизирующими вещественные числа, **различающиеся по смыслу.**

Знаки + или - символизируют возможное, но не выполненное алгебраическое суммирование двух его членов.

Биномы могут быть записаны в двух эквивалентных формах-в виде бинома-суммы: $a+b$ и в виде бинома-разности: $a-b$, где a и b – символы двух любых вещественных чисел (положительных и отрицательных), имеющих разный смысл.

По аналогии с комплексными числами, $a+bi$, стандартной формой записи бинома – будем считать суму, $a+b$. Однако эти формы в алгебре равноправны.

С вещественными биномами связаны происходящие от них **одночлены.**

Однобуквенный одночлен, происходящий от бинома- суммы, p, символизирует завершенное суммирование обоих чисел бинома: $a+b=p$

Одночлен p уже не является символом произвольного числа, тогда как a и b произвольны. Но при этом символ p «не помнит» из каких конкретных символов он образован.

Другой однобуквенный одночлен-происходящий от бинома разности-разность членов, $a-b=\delta$ также не помнит об исходных составляющих.

Хотя сами символы p и δ не помнят о своих составляющих, но их совокупность позволяет найти исходные символы.

Результат любых действий с биномами с последующим суммированием членов и результат тех же действий с одночленами должен быть одним и тем же.

Еще один одночлен -произведение членов бинома, $s= ab$ (которое может иметь разные знаки).

Очевидно, что p^2-δ^2=4s

Используя формулы квадратов суммы и разности символов бинома можно записать следующие соотношения:

$$p=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=M\sqrt{1+\frac{2s}{M^2}}\ ,$$

$$\Delta=\sqrt{a^2+b^2-2ab}=M\sqrt{1-\frac{2s}{M^2}}$$

где $M=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$ **- модуль бинома.**

Важной характеристикой бинома является также произведение $p\delta$ (также одночлен).

Им определяется другой вариант **модуля бинома**:

$$|p\delta|=|a^2-b^2|=\mu^2;$$

$$\mu=\sqrt{|p\delta|}=+\sqrt{|a^2-b^2|}$$

Абсолютное значение произведения одночленов выбирается для того, чтобы модуль μ всегда был вещественным числом.

Различные и часто неожиданные варианты этих простых формул возникают в дальнейшем.

Внутреннее суммирование **разнородных** членов (букв) бинома

$a+b=p$ и $a-b=\delta$

можно понимать и как объединение характеризуемых числами и буквами объектов разных подвидов в общий вид, т. е. как переход к другому, более общему виду «классификации» объектов.

Далее будет показано, что **внутреннее** суммирование членов бинома может быть осуществлено и другими способами**,** превращающими бином в произведение-**двухбуквенный одночлен.**

5) Возведение биномов (вещественных и комплексных) в целую вещественную степень *n*. Представление биномиального многочлена в форме бинома.

Для иллюстрации, забегая вперед, обратимся к единственному в обычной алгебре алгоритму, который рассматривается именно как действие с биномами-к формуле **бинома Ньютона.**

Запишем ее в обобщенной форме, используя оператор умножения *t* только для второго члена исходного бинома:

$$(a+tb)^n = n!\sum_{p=0}^{n}\frac{a^{n-p}(t^p b^p)}{p!(n-p)!} = A+tB$$

Для *t*=1 этот ряд может быть произвольно (аксиоматически) разбит на две суммы-сумму всех членов с четными и нулевым значениями *p* и сумму всех членов с нечетными *p*.

Для t=-1 ряд уже естественно разбивается на те же две суммы, но вторая сумма отрицательна.

Для t=*i* ряд разбивается на две суммы 1) вещественную сумму нулевого и всех четных членов и 2) мнимую сумму всех нечетных членов.

Объединяя (суммируя) все члены каждой из сумм образуем бином, рассматриваемый как n-я степень исходного бинома.

В. Алгебра вещественных биномов.

Подобно алгебре комплексных чисел может быть развита и алгебра вещественных биномов, рассматриваемых как самостоятельные математические объекты.

1)Суммирование биномов.

Суммой двух или нескольких биномов является бином, образованный суммированием соотносящихся членов всех биномов-слагаемых:

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+....(a_n+b_n)=a+b;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a+b$$

Важен порядок расположения членов биномов по отношению друг к другу. Одинаково расположенным и суммируемым членам фактически придается некий общий смысл.

2)Умножение вещественных биномов.

Варианты записи формул умножения биномов –в виде биномов сумм и биномов-разностей полезно рассматривать самостоятельно.

а) Бином-сумма.

Умножение друг на друга двух биномов, произведенное по правилам умножения многочленов, приводит к **четырех члену**:

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)=a_1a_2+b_1b_2+a_1b_2+a_2b_1$$

Произведение биномов-сумм разделяем **аксиоматически** на два двухбуквенных бинома (однородно-буквенный и разнородно- буквенный):

$$(a_1a_2+b_1b_2\ )+(a_1b_2+a_2b_1)=a+b;$$

Представление четырех члена в виде бинома и составляет основной «механизм» всех видов алгебры биномов.

Члены каждого бинома не могут быть представлены в виде **произведения буквы на бином.** Каждый из двухбуквенных биномов заменяется общим символом–новой буквой, что означает внутреннее суммирование членов такого бинома. Принятый алгоритм может быть назван **аксиомой умножения** алгебры биномов, записанных в стандартной форме биномов-сумм.

b) Бином - разность.

При записи исходных биномов в форме **разности в результате умножения** естественно получается **бином-разность** двух сумм:

$$(a_1a_2+b_1b_2\ )-(a_1b_2+a_2b_1)=a-b;$$

$$(a_1a_2+b_1b_2\ )+(-1)(a_1b_2+a_2b_1)=a+(-1)b;$$

Это естественное разделение становится аргументом и в пользу принятой выше аксиомы.

Отрицательные числа -с оператором умножения (-1) -исторически первый пример «иных или особых» чисел, возникших в алгебре при вычитании большего положительного числа из меньшего, не имеющем смысла в арифметике. Их применение приводит к естественному преобразованию четырех члена в бином. Это же наблюдается и в случае комплексных чисел, использующих «другое» число, *i*.

с) Соответствие комплексных и вещественных биномов.

Биномы *a+b* и *a+bi* записанные в стандартной форме следует считать **соответственными друг другу**. (О соответствии биномов и важных следствиях из него см. подробнее в работе [2]).

Полезно рассмотреть и сопоставить три варианта записи формул произведений комплексных биномов и произведений вещественных биномов

1.Произведения биномов-сумм:

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

$$\Pi_{1,2(R)} = (a_1+b_1)(a_2+b_2) = (a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1) = a+b$$

$$\Pi_{1,2(C)} = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = (a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1) = \alpha+ib$$

Алгоритм умножения комплексных биномов всегда формулируется именно как умножение биномов-сумм.

Замечаем, что после умножения биномов, записанных в стандартной форме,исходное соответствие вещественных и комплексных биномов нарушается.

При определении «комплексных» чисел, как «упорядоченных пар вещественных чисел» (без числа *i*) произведение комплексных биномов-сумм записывается **аксиоматически** именно как $\Pi_{1,2(C)} = (a_1a_2-b_1b_2\ )+(a_1b_2+a_2b_1) = \alpha+b;$,

Эта формула рассматривается как-постулат- **аксиома умножения упорядоченных пар чисел.**

2)Умножение бинома суммы на бином-разность:

$$\Pi_{1,2(R)} = (a_1+b_1)(a_2-b_2) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2-a_2b_1) = \alpha-i\beta;$$

$$\Pi_{1,2(C)} = (a_1+ib_1)(a_2-ib_2) = (a_1a_2+b_1b_2)-i(a_1b_2-a_2b_1) = a-i\beta;$$

Здесь также соответствие биномов после умножения нарушается.

3)Умножение биномов-разностей (**нестандартная** форма записи бинома).

$$\Pi_{1,2(R)} = (a_1-b_1)(a_2-b_2) = (a_1a_2+b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1) = a-b;$$

$$\Pi_{1,2(C)} = (a_1-ib_1)(a_2-ib_2) = (a_1a_2+b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1) = a-ib;$$

Именно в этом случае соответствие биномов после умножения сохраняется.

Произведения комплексных и вещественных биномов соотносятся уже сложнее, чем исходные биномы.

При **стандартной форме записи биномов и алгоритма умножения**, биномы-произведения различаются первыми членами:

$$a = \alpha + 2b_1b_2.$$

$$\Pi_{1,2(R)} = \Pi_{1,2(C)} + 2b_1b_2$$

3)Деление вещественных биномов.

Можно по-разному определить частное от деления бинома на бином в форме бинома.

1)Частное рассматривается как простая **рациональная биномиальная дробь,** естественно разделяемая на «бином» из двух простейших рациональных дробей, рассматриваемых как составляющие частного:

$$\frac{a_1+b_1}{a_2+b_2} = \frac{a_1}{a_2+b_2} + \frac{b_1}{a_2+b_2} = a+b;$$
,

Деление вводит в алгебру биномов **биномиальные дроби**.

Этот естественное описание деления не связано с введением каких-либо аксиом.

2)Другой вариант описания деления:

$$\frac{a_1+b_1}{a_2+b_2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)}{[(a_2^2+b_2^2)+2a_2b_2]} = \frac{a_3}{a_4+b_4} + \frac{b_3}{a_4+b_4} = a+b$$

использует принятую ранее аксиому умножения (при разделении числителя и знаменателя на две части). Знаменатель всегда положителен и не равен нулю.

3)Умножив числитель и знаменатель на (a_2-b_2) получим частное в форме разности:

$$\frac{a_1+b_1}{a_2+b_2} = \frac{(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2-a_2b_1)}{a_2^2-b_2^2} = \frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_2^2-b_2^2} - \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2-b_2^2} = a-b.$$

Деление по этому алгоритму теряет смысл в случае равенства обоих членов бинома-делителя.

Эти результаты следует сравнить с делением комплексных чисел:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}i = a-bi.$$

Результирующий бином здесь также образуется двумя рациональными **биномиальными дробями.**

Деление биномов (**вещественных и комплексных)** приводит к введению **в алгебру биномов,** образованных **рациональными** дробями. Это обстоятельство обычно не замечается.

«Внутренних» оснований для предпочтения какого-либо из вариантов описания деления нет. Первый вариант-наиболее прост.

Однако, третий алгоритм, используемый и при делении комплексных чисел, оказывается общим для всех видов комплексных биномов («чисел»), позволяющим преобразовать полученное выражение (частное) в комплексный бином. Это создает возможность сравнивать деление различных вариантов биномов.

3.Приведенные формы вещественных и комплексных биномов. Функциональные биномы.

Общие замечания.

Алгебраические биномы можно разными способами преобразовать в **приведенные формы,** использующие **взаимосвязанные относительные величины. Такие формы удобны для выполнения мультипликативных опе-**

раций с биномами. Они создают существенно новые возможности, принося в алгебру представления геометрии.

Бином в приведенной форме образуется произведением **модуля** на **приведенный бином**, образованный двумя относительными (приведенными) величинами. Последние всегда находятся в узкой «элементарной» или «единичной» области числовой оси. Последующее умножение на модуль-переводит приведенный бином в другие области числовой прямой.

Составляющими бинома становятся функции, обладающие своими особенностями и взаимосвязями и образующие функциональный бином. Между образующими приведенный бином числами или буквами возникают взаимосвязи, определяемые способом приведения (а в дальнейшем и его геометрическим истолкованием). Так мы переходим от действий с биномами-числами к действиям с **функциональными биномами** , к действиям с функциями.

Формулы приведения позволяют далее преобразовать бином в двух буквенный одночлен-**произведение двух величин**, определяемых «слагаемыми» суммы.

Обе формы представления «пары чисел» (**бином и одночлен**) взаимосвязаны. Задание одной из них определяет другую. Рассматриваются три варианта функциональных биномов (образованных по разным принципам):

Линейный или долевой: $y + x = 1$

Круговой: $y^2 + x^2 = 1$

Гиперболический: $y^2 - x^2 = 1$

1)Долевой вариант (приведение через сумму членов бинома).

Рассмотрим приведение вещественных биномов в «долевом» или «весовом» варианте:

$$a \pm b = M(\frac{a}{M} \pm \frac{b}{M}) = M(p \pm q) = M\kappa;$$

где $M = (|a| + |b|)$ - **долевой или весовой** модуль.

Этот способ используется в теории вероятностей (описания действий с двумя исходами, биномиальные распределения), откуда мы и заимствуем обозначения.

Однако, в теории вероятности величины $a,\ b, p$ и q всегда положительны, тогда как в **алгебре биномов они могут иметь разные знаки.**

Суммирование долевых переменных переводит бином в произведение-**двухбуквенный одночлен**.

Между **абсолютными значениями** приведенных относительных долевых величин существуют следующие соотношения:

$$|p| + |q| = 1;$$

$$|p| - |q| = (2|p| - 1) = (1 - 2|q|) = 2(|p| - 0.5) = 2\delta.$$

Здесь δ -отклонение абсолютного значения долевой переменной p от средней величины. Его можно рассматривать как **самостоятельную** характерную переменную величину, изменяющуюся в интервале $-0.5 < \delta < 0.5$

Очевидно, что $|p| = \frac{1+2\delta}{2}; |q| = \frac{1-2\delta}{2}.$

Задание p или q определяет δ, тогда как задание δ определяет величины p и q.

Умножение биномов в приведенной долевой форме определяется как

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = M_1(p_1 + q_1)M_2(p_2 + q_2) = M(P + Q),$$

где по **аксиоме умножения**:

$$P = (p_1 p_2 + q_1 q_2);\ Q = (p_1 q_2 + p_2 q_1).$$

Абсолютные значения составляющих бинома- произведения $|P|$ и $|Q|$ определяются абсолютными значениями всех образующих их сомножителей:

$$|P| = |p_1||p_2| + |q_1||q_2| = \alpha + \beta;$$

$$|Q| = |p_1||q_2| + |p_2||q_1|;$$

Между составляющими «бинома- произведения» сохраняются те же соотношения:

$$|P| + |Q| = 1;$$

$$|P| - |Q| = 2|P| - 1 = 1 - 2|Q| = 2\Delta.$$

Задание величины Δ определяет и задание величин $|P|$ и $|Q|$. Это затем позволяет определить и необходимые для выполнения заданных условий величины $|p_1|$ и $|p_2|$,, а, соответственно, и $|q_1|$ и $|q_2|$.

В случае «комплексных чисел», для бинома-произведения, $P + Qi$:

$$P_2 = |p_1||p_2| - |q_1||q_2| = \alpha - \beta = P - 2\beta;$$

$$Q = |p_1||q_2| + |p_2||q_1|;$$

$|P_2|+|Q|<1$

Долевой метод, по видимому, до сих пор не использовался в алгебре ни для вещественных, ни для комплексных чисел.

2) Круговой или тригонометрический вариант (приведение бинома- суммы через сумму квадратов его членов).

Этот способ широко используется в математике комплексных чисел. Здесь мы его считаем алгебраическим, временно забыв о тригонометрии.

1.Вещественный бином $a+b$ может быть **представлен** в приведенной форме по следующему алгоритму:

$a+b=r(\alpha+\beta)=c=rk$, где $r=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$

- модуль приведенного бинома-суммы- абсолютная величина корня квадратного из суммы квадратов членов бинома. При этом

$$\alpha=\frac{a}{r}\le 1;\ \beta=\frac{b}{r}\le 1; \qquad k=\alpha+\beta$$

k может оказаться и положительной и отрицательной величиной, а также и нулем.

Здесь автоматически возникает **характерная для этой формы приведения** связь между членами бинома в приведенной форме

$\alpha^2+\beta^2=1$

Приведенный бином может быть **сведен в одночлен (редуцирован) по следующему алгоритму:**

$$a+b=p=r(\alpha+\beta)=rk;$$

$$k=\alpha+\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Теперь бином образовал **двухбуквенный** одночлен. В этом и состоит основной смысл введения приведенных величин.

Состоящий из двух множителей **приведенный одночлен»,** rk, **«помнит»** об исходных символах α и β и ,соответственно, a и b, поскольку может быть записана и решена система уравнений:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha^2+\beta^2=1\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{2-k^2});\ \beta=\frac{1}{2}(k\mp\sqrt{2-k^2});$$

Величина k **всегда** находится в интервале значений от $\sqrt{2}$ до $-\sqrt{2}$, поскольку α и β-вещественные числа.

2.Сравнивая с комплексными биномами, замечаем, что, хотя **бином** вида $a+bi=r(\alpha+\beta i)$ и не суммируется в алгебраическом смысле, все полученные формулы вполне относятся к вещественным составляющим приведенного комплексного бинома.

3) Приведение бинома-разности через разность квадратов.

1. **Вещественные числа** могут образовать алгебраический **бином-разность,**

a-b

Может быть введен **модуль бинома- разности** –абсолютное значение корня квадратного из **абсолютной** величины разности квадратов его членов:

$$\mu=+\sqrt{|a^2-b^2|}$$

Модуль принимает **нулевое значение** при равенстве образующих его чисел.

Бином-разность можно записать в приведенной форме, а затем представить в виде двухбуквенного одночлена:

$$a-b=\mu(\frac{a}{\mu}-\frac{b}{\mu})=\mu(\gamma-\lambda)=\mu t; \quad \gamma=\frac{a}{\mu};\lambda=\frac{b}{\mu};$$

$$t=\gamma-\lambda=\frac{a-b}{\mu}=\frac{a-b}{+\sqrt{|a^2-b^2|}};$$

При этом справедливо соотношение:

$abs(\gamma^2-\lambda^2)=1$

При b=a представление бинома в такой форме теряет смысл и множитель t становится неопределенным, (0/0). Естественно, что этот случай должен быть исключен.

Между величинами γ,λ и t может быть установлена связь:

$$\begin{cases}\gamma-\lambda=t\\ \gamma^2-\lambda^2=\pm1\end{cases}\qquad \gamma=\frac{1}{2}(t\pm\frac{1}{t});\quad \lambda=-\frac{1}{2}(t\mp\frac{1}{t})$$

Приведенные величины λ и γ определяются, соответственно, полу суммой и полу разностью переменной t и взаимно-обратной ей переменной. Эти величины теряют смысл, когда t=0.

Одночлен μt «помнит» об исходном биноме, который легко восстанавливается по значениям составляющих его букв. Произвольное задание t и μ полностью определяет вещественный бином.

5)Умножение биномов-сумм в редуцированной форме (в виде двухбуквенных одночленов).

Приведенные формы бинома позволяют ввести иные алгоритмы умножения биномов, не нуждающиеся в аксиоме умножения.

1.Один из вариантов такого алгоритма может быть основан на **редуцировании** одного из биномов-множителей, одним из ранее приведенных способов, сводящим его в одночлен из двух букв.

Выбрав тригонометрический вариант получаем

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)=r_1(\alpha_1+\beta_1)r_2(\alpha_2+\beta_2)=(r_1r_2k_1)(\alpha_2+\beta_2)=r_3(\alpha_2+\beta_2)$$

Очевидно, что даже в случае двух биномов-сомножителей результат формально неоднозначен и зависит от порядка расположения сомножителей, что неудобно. Применение этого варианта требует комментариев.

2.Можно перед умножением редуцировать оба бинома. Полученный при этом двухбуквенный одночлен должен быть разделен на два сомножителя, r_3 и k_3, по которым может быть образован новый бином- произведение.

1) $$(a_1+b_1)(a_2+b_2)=r_1(\alpha_1+\beta_1)r_2(\alpha_2+\beta_2)=(r_1r_2k_1k_2)=r_3k_3=r_3(\alpha_3+\beta_3).$$

2) $$(a_1+b_1)(a_2+b_2)=r_1(\alpha_1+\beta_1)r_2(\alpha_2+\beta_2)=(r_1r_2\sqrt{2})(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}})=r_4k_4=r_4(\alpha_4+\beta_4).$$

Вариант 1) не обеспечивает описания результата в вещественных числах. В варианте 2) **аксиоматически** вводится корректирующий множитель$\sqrt{2}$,обеспечивающий вещественный результат. Все варианты умножения могут быть использованы при операциях с биномами, но они должны быть прокомментированы.

Умножение нескольких биномов друг на друга по такому алгоритму требует введения корректирующего множителя при каждом последовательном умножении.

Используя редуцирование, мы можем выполнить и извлечение корня целой степени из бинома:

$$(a+b)^{1/n}=(rk)^{1/n}=r^{1/n}k^{1/n}=r_1k_1=r_1(\alpha_1+\beta_1);$$

Множитель k может оказаться отрицательным, и тогда извлечение **корня четной** степени по обычным представлениям запрещено. Существует возможность отказаться в алгебре от этого ограничения [3].

6) Деление биномов в редуцированной форме.

В дополнение к ранее описанным вариантам описания деления приведем вариант описания деления биномов в редуцированной форме:

$$\frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}=\frac{r_1k_1}{r_2k_2}=r_3k_3=a_3+b_3;$$

Деление в такой форме допустимо тогда, когда k_3 находится в интервале существования вещественного бинома. Более общий вариант описания деления:

$$\frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}=\frac{r_1k_1}{r_2k_2}=r_3(\sqrt{2})[(\frac{k_1}{k_2})/(\sqrt{2})]=rk=a+b.$$

Его недостатком является «произвольность» коррекции приведенного бинома.

7) Логарифмирование бинома в приведенной тригонометрической форме.

Редуцирование позволяет логарифмировать бином.

$$\log_t|(a+b)|=\log_t(abs(rk))=\log_t r+\log_t|k|=r_1k_1=r_1(\alpha_1+\beta_1)=a_1+b_1.$$

При логарифмировании бинома логарифмируется и модуль, что напоминает логарифмирование комплексных чисел.

Множитель k может быть отрицательным. Поскольку в алгебре сейчас используются только логарифмы положительных чисел, поэтому и здесь вводятся абсолютные величины. Но это «арифметическое» ограничение в принципе может быть отменено [3].

Подводя итог, можно сказать, что использование приведенной формы биномов и редуцирования привело к результатам, которые трудно было представить в обычной алгебре.

В. Двумерная алгебра и геометрия вещественных биномов.

1.Точка вещественной плоскости и ее характеристики. Соответствия между точками.

Алгебра биномов может быть также рассмотрена в двумерном варианте.

Система координат обычно используется для описания связи между аргументом и функцией.

Точка вещественной плоскости характеризуется упорядоченной «парой» имеющих разный смысл вещественных чисел $(x;\ y)$. Как в случае вещественных, так как и в случае комплексных чисел, упорядоченные пары чисел, записанные в алгебраической форме бинома, могут рассматриваться как координаты точки плоскости. Постулируемое ранее требование представления результатов действий с биномами именно в форме бинома становится естественным.

2.Геометрические характеристики двумерных биномов.

Неориентированный прямоугольник со сторонами a и b обладает следующими геометрическими характеристиками: $a+b=p; a-b=\delta$. (где a-большая, а b-меньшая сторона прямоугольника), $q=ab$

Здесь p- полупериметр, δ - разность длин большей и меньшей сторон-всегда положительные величины. Площадь q всегда положительна.

Далее характеристики p,δ и q автоматически возникают в некоторых полезных тригонометрических формулах.

Координаты точки Q в декартовой системе координат образуют ориентированный прямоугольник. Здесь эти величины становятся **алгебраическими и характеризуются абсолютной величиной и знаком.**

Из начала координат в точку Q может быть проведена диагональ прямоугольника, рассматриваемая как вектор, направленный из начала координат в эту точку. Он образует с осью абсцисс угол ф, характеризуемый длиной или модулем M (абсолютной величиной, не зависящей от направления). Величины M и ф в совокупности образуют полярные координаты точки.

В геометрии биномов одновременно и без каких-либо противоречий рассматриваются и используются декартовы и полярные координаты точек плоскости.

Между координатами и площадью координатного треугольника существует уже рассмотренная ранее алгебраическая связь:

$$\frac{x+y}{M}=\sqrt{1+\frac{2xy}{M^2}};\ \frac{x-y}{M}=\sqrt{1-\frac{2xy}{M^2}};\ \text{где } M=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|$$

Как и в случае комплексной плоскости в алгебре вещественных биномов возникает возможность применения тригонометрии и ее правил.

Каждому вектору точки соответствует вектор с единичным модулем.

Каждому координатному прямоугольнику соответствует свой единичный прямоугольник с единичной диагональю.

3.Суммирование двумерных биномов.

В двумерном случае стороны результирующего прямоугольника (суммы биномов) являются суммой соответственных сторон прямоугольников-слагаемых

$$\sum x_i+\sum y_i=x+y,$$

где x и y -координаты точки Q, представляющей **двумерный бином как «сумму точек»**.

Сложение двумерных биномов может привести к появлению суммирующей точки в любом квадранте системы координат.

4.Тригонометрическая форма двумерных биномов.

Точка в декартовой системе координат, определяется как двумя декартовыми, так и двумя полярными координатами:

1) $x+y=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|\left(\frac{x}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}+\frac{y}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}\right)=$.

$=r(\cos\varphi+\sin\varphi)=r(\cos\varphi+\sqrt{1-\cos^2\varphi})$

2) $r=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|$ - модуль бинома (радиус-вектор полярных координат),

3) $\varphi=\arccos(\frac{x}{r})=\arcsin(\frac{y}{r})$

Алгебраические биномы в **приведенной тригонометрической форме** трактуются **двумерно**. Действия с биномами становятся действиями с тригонометрическими функциями.

Это позволяет дальнейшее обобщение функциональных биномов. Бином становится периодической функцией от двух независимых переменных, r и ф (или x), используемых в системе полярных координат. Исходный бином не содержал никакого намека на описание периодичности.

Функциональный тригонометрический бином можно *с сохранением информации* преобразовать в тригонометрический одночлен.

5. Сложение биномов в тригонометрической форме.

Согласно общему алгоритму сложение двух биномов в тригонометрической форме представляется как $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$.

$$r_1\left(\frac{x_1}{r_1}+\frac{y_1}{r_1}\right)+r_2\left(\frac{x_2}{r_2}+\frac{y_2}{r_2}\right)=r_3\left(\frac{x_1+x_2}{r_3}+\frac{y_1+y_2}{r_3}\right);$$

или $r_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)+r_2(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)=r_3(\cos\varphi_3+\cos\varphi_3);$

$r_3 = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$;

$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{x_1+x_2}{r_3}\right) = \arcsin\left(\frac{y_1+y_2}{r_3}\right)$;

Этот алгоритм аналогичен алгоритму сложения «комплексных чисел»:

$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.

$$r_1\left(\frac{x_1}{r_1}+i\frac{y_1}{r_1}\right)+r_2\left(\frac{x_2}{r_2}+i\frac{y_2}{r_2}\right)=r_3\left(\frac{x_1+x_2}{r_3}+i\frac{y_1+y_2}{r_3}\right);$$

Эти выражения легко распространяются и на сумму многих биномов. Тригонометрическая трактовка сложения оказывается более сложной и менее удобной, чем алгебраическая.

6.Элементарные тригонометрические биномы. Варианты их представления в виде одночлена (тригонометрическая редукция элементарных биномов).

Назовем бином-сумму, $\cos\varphi+\sin\varphi$,и бином-разность,$\cos\varphi-\sin\varphi$, элементарными тригонометрическими биномами. Их составляющие- декартовы координаты точки на окружности с единичным радиусом-вектором.

Дадим этим **функциям** естественные обозначения cps φ и cms φ.

Они определяют сумму p, и разность, δ, двух разных сторон координатного прямоугольника с единичной диагональю, как некие характеристики положения точки на окружности единичного радиуса. Эти функции легко распространить и на любой («нэлементарный») прямоугольник, путем введения модуля, отличного от единицы.

Хорошо известны формулы: $\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)$; $\cos\varphi-\sin\varphi=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)$,

представляющие и сумму, и разность синуса и косинуса **в логарифмируемой форме**, сводящие элементарный тригонометрический бином в одночлен:

$\mathrm{cps}\varphi=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)$;

$\mathrm{cms}\varphi=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)$;

Это периодические функции, изменяющиеся в интервале от ($\sqrt{2}$ до - $\sqrt{2}$) с периодом 2π, т.е. с тем же периодом, что и у обычных синусоиды и у ко-синусоиды. Здесь им придается самостоятельная роль. При необходимости функции могут быть нормализованы делением на множитель $\sqrt{2}$.

Операцию сведения элементарного бинома в одночлен назовем тригонометрическим **редуцированием** элементарного бинома.

Это не обычное суммирование, поскольку при **редукции не теряется информация об исходных составляющих суммы**. Все эти формулы «обратимы». По значению функций справа и слева всегда можно найти аргумент x и перейти от одной формы выражения к другой. При прямых и обратных операциях бином преобразуется без потери первоначальной информации. Тригонометрический бином всегда может быть «свернут» или «редуцирован», и представлен в виде «тригонометрического одночлена», а последний вновь переведен в бином.

В ранее записанных нами ранее алгебраических формулах,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha^2+\beta^2=1\end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{2-k^2});\ \beta=\frac{1}{2}(k\mp\sqrt{2-k^2})$$

мы узнаем следующие тригонометрические формулы:

$$\begin{cases}\sin\varphi+\cos\varphi=cps\,\varphi.\\ \sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\end{cases}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(cps\varphi\pm\sqrt{2-(cps\varphi)^2});\ \sin\varphi=\frac{1}{2}(cps\varphi\mp\sqrt{2-(cps\varphi)^2})$$

При этом существенно, что всегда abs(cps)$\le\sqrt{2}$.

Представление вещественных биномов в тригонометрической форме и их дальнейшее редуцирование создает возможность описания периодичности. Отсюда возникает возможность использования вещественных биномов при описании волновых явлений.

Математика определяет функции, широко используемые в тригонометрии, также и аналитически -с помощью рядов, обобщая их, сохраняя их названия. Тогда и элементарные тригонометрические биномы становятся алгебраическими функциями. Очевидно, что в алгебре (уже в отрыве от геометрии) полученные одночлены могут рассматриваться через разложения в ряд. Элементарные тригонометрические биномы можно представить виде разложений в ряд двумя способами:

1) В виде суммы или разности двух алгебраических рядов- разложений функций синуса и косинуса аргумента x.

2) Как один тригонометрический ряд разложения синуса или косинуса от аргумента $(\frac{\pi}{4}-x)$ (с общим модулем $\sqrt{2}$).

В алгебре биномов редукция- представление биномов в форме двухбуквенного одночлена- может играть роль, сходную с формулами Эйлера в алгебре комплексных чисел. Она упрощает и обосновывает действия с вещественными биномами.

Редуцированный бином удобно умножать на другой бином, возводить в степень, извлекать из него корни, логарифмировать.

7.Сравнение редукции комплексных и вещественных биномов.

Многие операции с **комплексными биномами** проводятся не непосредственно с ними, а с редуцирующими их одночленами -показательными функциями Эйлера- с последующим переходом от них вновь к комплексным биномам.

Формула Эйлера сводит комплексный бином к двух символьному одночлену, что и придает ему новые возможности. Обычно эта формула записывается в неудобном для понимания виде:

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

В левой части ее стоит показательная функция мнимого аргумента, тогда как в правой - комплексный бином, содержащий две функции вещественного аргумента (реальную и мнимую). Внешне его трудно представить в виде какой-либо общей суммы. Более понятен **эквивалентный** вариант записи этой формулы через мнимый аргумент:

1) $e^{ix}=\cos ix+\sin ix=\mathrm{cps}(ix)$.

2) $\cos ix+\sin ix=\mathrm{cps}(ix)=\cos x+i\sin x$

Таким образом, формула Эйлера, справа и слева в 1), сводит элементарный комплексный бином к одночлену (редуцирование). **Формально** можно считать, что функции e^{ix} и $\mathrm{cps}(ix)$ -одно и то же. При этом графическое представление функции $\mathrm{cps}(ix)$ требует описания комплексной плоскости в координатах *(ix,y)*, отличных от координат обычной комплексной плоскости (*x,iy*).

Но реально все обстоит сложнее. Операция возведения в мнимую степень отсутствует в алгебре вещественных чисел, поскольку в ней нет числа *i*. Таким образом, возведение в мнимую степень-это некая **меж алгебраическая операция перехода** от одной алгебры к другой. Через нее вещественные биномы, описываемые в координатах (*x,y)* могут сопоставляться с комплексными биномами, описываемыми в координатах комплексной плоскости.

Реально, оперируя с мнимыми экспонентами, мы оперируем **в вещественной плоскости с обычными вещественными экспонентами (или с гиперболическими биномами, образующими экспоненту). Возведение экспоненты в мнимую степень или замена вещественного аргумента** в ее разложении в ряд на мнимый-это **меж алгебраическая операция соответствия,** относящаяся к теории множеств

8. Более сложный вариант тригонометрического бинома и его редуцирование.

Представляют интерес тригонометрические биномы вида:

$a\cos px+b\sin px$ и $a\cos px-b\sin px$,

Они редуцируются следующим образом:

$$a\cos px+b\sin px=r\left[\frac{a}{r}\cos px+\frac{b}{r}\sin px\right]=$$

$$=r(\cos\alpha\cos px+\sin\alpha\sin px)=r\cos(px+\alpha);$$

$$r=\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|;\quad \alpha=\arccos(\frac{a}{r})=\arcsin(\frac{b}{r}).$$

Таким образом:

$A+B=R(a\cos x+b\sin x)=Rr\cos(x+\alpha);$

$A-B=R(a\cos x-b\sin x=Rr\sin(x+\alpha)$

У редуцированного бинома вместо «фазы», $\pi/4$, и «амплитуды», $\sqrt{2}$, возникают другие, более общие величины, определяемые коэффициентами *a* и *b*. **Появляется** более общая **постоянная** составляющая угла (« фаза»).

Эти хорошо известные формулы используются в механике и физике при описании гармонических колебаний и волн («сложение волн», ряды Фурье). Они являются вариантом хорошо известных тригонометрических формул:

$\cos x_1\cos x_2+\sin x_1\sin x_2=\cos(x_1-x_2);$

$\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2=\sin(x_1+x_2).$

В тригонометрии имеются и другие, более или менее сложные **редуцирующие формулы,** представляющие тригонометрические суммы в виде одночленов (в «логарифмируемой форме»).

9.Прямое умножение алгебраических биномов в приведенной тригонометрической форме.

Формулы умножения биномов можно записать в двумерном варианте (следуя аксиоме умножения):

1. $(x_1+y_1)(x_2+y_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)=x_3+y_3$
2. $(x_1-y_1)(x_2-y_2)=(x_1x_2+y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)=x_3-y_3$
3. $(x_1+y_1)(x_2-y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2-x_2y_1)=x_4-y_4$

Эти же формулы в **приведенной тригонометрической форме:**

$$1.\ r_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_2\sin\varphi_1)];$$

$$2.\ r_1(\cos\varphi_1-\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2-\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)-(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_2\sin\varphi_1)];$$

$$3.\ r_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2-\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)-(\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\varphi_2\sin\varphi_1)];$$

Произведение двух биномов в тригонометрической форме естественно образует тригонометрический *четырех член.* Его составляющие разделяются на две группы, вполне соответствующие алгебраической аксиоме умножения биномов. Из известных тригонометрических формул

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

следует, что тригонометрический «четырех член» может быть представлен в виде **тригонометрического бинома от двух разных углов:**

$$1.\ r_1\left(cos\varphi_1+sin\varphi_1\right)\ r_2\left(cos\varphi_2+sin\varphi_2\right)=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]=$$
$$r_1r_2(cos\,\psi_1+\sin(\psi_2);$$

$$2.\ r_1\left(cos\varphi_1-sin\varphi_1\right)\ r_2\left(cos\varphi_2-sin\varphi_2\right)=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right];$$

$$3.\ r_1\left(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\right)\ r_2\left(\cos\varphi_2\text{-}\sin\varphi_2\right)=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1\text{-}\varphi_2)\right].$$

С точки зрения геометрии эти формулы можно трактовать как преобразование двух прямоугольных треугольников в один новый и установления взаимосвязи между этими тремя геометрическими фигурами.

При тригонометрической трактовке при умножении функциональных биномов получаются периодические функции, более сложные, чем обычные синусоиды и ко- синусоиды.

Эти сложные **волновые и не волновые** периодические и не периодические функции могут непосредственно отображать результаты реальных физических процессов, в том числе и волновых и оказываются их моделями. Это может быть важнейшим применением вещественных биномов.

10.Тригонометрическое усреднение.

С другой стороны, можно применить следующий вариант описания умножения элементарных биномов-сумм в редуцированной форме, не используя аксиому умножения:

$$\mathrm{cps}(\varphi_1)\mathrm{cps}(\varphi_2)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi_1)\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi_2)=\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\psi)=$$

$$=\sqrt{2}cps(\psi)=\sqrt{2}(\cos\psi+\sin\psi).$$

$$\psi=\frac{\pi}{4}-\arccos[\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi_1)\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi_2).$$

Очевидно, что этот вариант описания умножения является **усредняющим**-описанием результата через некий усредненный угол ψ- **функцию исходных углов.**

Произведения косинусов, синусов и их смешанные произведения всегда находятся в интервале значений между нулем и единицей и могут рассматриваться как некая тригонометрическая функция, значения которой лежат в той же области.

Те же усреднения можно использовать и для других сочетаний элементарных биномов-сомножителей.

11.Другой вариант тригонометрического усреднения произведения биномов.

Результат умножения приведенных тригонометрических биномов можно представитькак новый бином, который затем также п можно перевести в логарифмируемую форму:

$$\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]=r[\cos(\varphi_1-\varphi_2)/r+\sin(\varphi_1+\varphi_2)/r]=r(\cos\varphi+\sin\varphi);$$

$$r=\sqrt{\left[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2)+\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)\right]}$$

где r-«тригонометрический модуль».

Усредненный угол ф нового элементарного бинома определяется как

$$\varphi=\arccos[\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{r}]=\arcsin[\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{r}]$$

Далее следует преобразование нового бинома в логарифмируемый одночлен:

$$r(\cos\varphi+\sin\varphi)=r\mathrm{cps}\varphi=r\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi).$$

Это преобразование фактически получено через аксиому умножения, хотя внешне она забыта.

12. Умножение биномов в приведенной форме.

Произведение любого числа различных или одинаковых элементарных биномов всегда может быть записано в редуцированной форме в варианте, удобном для логарифмирования:

$$\mathrm{cps}(x_1)\mathrm{cps}(x_2)...=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x_1)\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x_2)....$$

Так произведение любого числа элементарных биномов, которое в развернутой форме должно быть сложным многочленом, сводится к логарифмируемому одночлену.

13. Возведение в степень и извлечение корня из элементарных бинома-суммы и бинома- разности в редуцированной форме.

1.При возведении в степень элементарного бинома-суммы имеем:

$$(\cos\varphi+\sin\varphi)^n=[\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)]^n.$$

Далее мы можем преобразовать полученное выражение в новый элементарный бином:

$$[\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\varphi)]^n=(\sqrt{2})^{n-1}[\sqrt{2}\cos^n(\frac{\pi}{4}-\varphi)]=$$

$$=r[\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\psi)]=r(\cos\psi+\sin\psi);$$

$$r=(\sqrt{2})^{n-1};\psi=\frac{\pi}{4}-\arccos[\cos^n(\frac{\pi}{4}-\varphi)];$$

2.При возведении в степень элементарного бинома-разности имеем:

$$(\cos\varphi-\sin\varphi)^n=[\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)]^n.$$

При возведении в степень элементарного бинома у него возникает **числовой модуль.**

Обратные тригонометрические функции, ψ , различаются по форме для четных и нечетных значений n. Получаемые после возведения в степень варианты тригонометрического бинома достаточно просты.

Нормализация исходных тригонометрических функций, последующие действия с ними, а затем и введение в результат числового модуля обеспечивают возможности представления результата в форме тригонометрического бинома.

Показатель степени n в этих формулах может быть и дробным, хотя такие функции более сложны.

Частным вариантом этих формул являются выражения для извлечения корня любой степени из бинома-суммы или бинома-разности

Теперь возведение в степень **алгебраического** бинома представляется **общими формулами**:

$$(x+y)^n=R^n(\mathrm{cps}\,\varphi)^n=R^nr^n(\mathrm{cps}\,\psi).$$

$$(x-y)^n=R^n(\mathrm{cms}\,\varphi)^n=R^nr^n(\mathrm{cms}\,\psi).$$

В отличие от алгебраических формул бинома Ньютона, они непосредственно представляют степень бинома как новый тригонометрический бином.

14. Логарифмирование редуцированных элементарных тригонометрических биномов.

В тригонометрии редуцирование тригонометрического бинома рассматривается именно как представление суммы синуса и косинуса одного угла в логарифмируемой форме.

Результат логарифмирования также периодическая функция.

Логарифмирование отрицательных значений традиционно не допускается. Отсюда следует, что искомый логарифм находится лишь в 1-м квадранте системы координат. Распространение результатов на другие квадранты требует обобщения математических операций на отрицательные числа. **При некотором переосмыслении исходных алгебраических положений это оказывается возможным и полезным [3].**

В случае **комплексных биномов именно редукция (сведение бинома в одночлен) создает** возможность их логарифмирования.

15. Деление бинома на бином в тригонометрической форме.

1.Деление вещественных биномов можно провести **сначала в алгебраической форме**. Лишь после этого результат, состоящий из рациональных дробей (после пере обозначения символов), можно представить в тригонометрической форме **функционального бинома**. Такое деление можно назвать **алгебраическим.**

2.Деление двух вещественных алгебраических биномов можно провести уже после перехода к функциональным тригонометрическим биномам, сразу рассматривая их как функции в редуцированной форме. При этом возникают довольно сложные и даже разрывные периодические функции (такого же типа как тангенсы и котангенсы). Такое деление можно назвать **тригонометрическим**.

Таким образом, существуют **разные по смыслу** алгоритмы деления вещественных биномов.

В случае комплексных биномов также возможны два разных алгоритма деления. Однако, деление комплексных биномов именно как функциональных биномов в приведенной тригонометрической форме (формулы Муавра) здесь оказывается гораздо более удобным.

Другой алгоритм деления в алгебре комплексных биномов фактически не замечают.

16.Представление вещественных и комплексных биномов в приведенной гиперболической форме.

Ранее описанный способ приведения биномов в форме бинома-разности создает многие возможности в алгебре биномов, определяемые выбором переменной t.

Так, соотношение $\gamma^2-\lambda^2=1$ вполне соответствует известному соотношению гиперболических функций: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$. Можно принять, что

$$\gamma=\cosh(x);\ \lambda=\sinh(x);$$

$$t=e^{-x};t^{-1}=e^{x}.$$

Мы приходим к **гиперболическому варианту** приведения алгебраических вещественных биномов и их представления в виде функциональных биномов:

$$\mu[\cosh(x)-\sinh(x)]=\mu\exp(-x);$$

$$\mu[\cosh(x)+\sinh(x)]=\mu\exp(x);$$

Такое преобразование можно провести и для **комплексных биномов**, исходно записанных в форме бинома-разности. Гиперболические функции от переменной x могут также образовывать комплексный бином («комплексное число»):

$$a+bi=\mu[\cosh(x)+i\sinh(x)];$$

$$a-bi=\mu[\cosh(x)-i\sinh(x)];$$

Возможно, что гиперболическая форма приведения и гиперболические биномы в алгебре комплексных чисел ранее не применялись.

Еще раз напомним, что существуют не только рассмотренные, но и другие **варианты** приведенных вещественных и комплексных биномов (**комплексных чисел**), определяемых выбором переменной *t.*

17.Связь гиперболических переменных с координатами точки на плоскости

Рассматривая *а* и *в* как координаты x и y точки в декартовой системе координат вспоминаем, что уравнение $\left|x^2-y^2\right|=1$ является каноническим уравнением двух равносторонних гипербол, ориентированных вдоль оси абсцисс. Их асимптотами являются диагонали системы координат. Модуль канонической гиперболы **равен единице**. Модуль $\mu=+\sqrt{\left|x^2-y^2\right|}$ может далее рассматриваться и как **независимая от аргумента** x **величина, масштабирующая каноническую гиперболу.**

Уравнение $x^2-y^2=-1$

описывает две другие (мнимые) гиперболы, ориентированные вдоль оси ординат.

Любая точка плоскости (кроме точек на диагоналях координат) может принадлежать **масштабированной модулем** канонической гиперболе. Ее координаты определяют и величину *t*:

$$t=\left|\gamma-\lambda\right|=\left|\frac{x-y}{\mu}\right|=\left|\frac{x-y}{\sqrt{\left|x^2-y^2\right|}}\right|=+\frac{\sqrt{\left|x-y\right|}}{\sqrt{\left|x+y\right|}}=+\sqrt{\left|\frac{\delta}{p}\right|}$$

Переменная t, определяемая двумя характеристиками координатного прямоугольника точки, может рассматриваться как еще одна его безразмерная характеристика. Это же относится и к обратной величине t^{-1}.

Полезно выбрать за переменную t экспоненту -функцию, однозначно связанную с характеристиками канонической гиперболы: $t=e^{x}$. Тогда

$$x=\ln t;\ \ t^{-1}=e^{-x},\gamma=\cosh(x),\lambda=\sinh(x).$$

Таким образом, функциональный вещественный бином может быть записан в форме гиперболического бинома, редуцируемого одночленом-экспонентой:

$$\left|x+y\right|=\mu\left[\cosh\left(x\right)-\sinh(x)\right]=\mu e^{-x}$$

$$\left|x-y\right|=\mu\left[\cosh\left(x\right)+\sinh(x)\right]=\mu e^{x}$$

Таким образом, мы описали координаты точек на плоскости через экспоненту и связанные с ней гиперболические функции. Эта форма описания удобна для описания мультипликативных действий. Фактически же мы пришли к удобному описанию всех точек вещественной плоскости через экспоненту.

Рассматривая алгебру биномов, мы на разных уровнях обобщения переходили от собственно биномов к функциональным биномам, а затем и к редуцирующим их функциям. Действуя в алгебре уже непосредственно с функциями, мы забываем о том, что координаты точек образуют бином, редуцируемый функцией, и что при этих действиях мы преобразуем одни биномы в другие по алгоритмам, которые возникли как действия с биномами.

Любая точка плоскости может принадлежать некой окружности (тригонометрическое описание), гиперболе (гиперболическое описание) и экспоненте. Таким образом, преобразования точек плоскости могут рассматриваться как преобразования точек элементарных (единичных) кривых, путем умножения на положительный модуль, рассматриваемый уже как произвольно выбранная независимая величина.

18.Редуцирование бинома степенной функцией.

Замечаем, что за переменную t можно выбрать и саму переменную x или степенную функцию x^p. Обратными к ним являются функция x^{-1}, определяющая обратно пропорциональную зависимость, или более общие функции x^{-p}.

Степенные функции связаны с экспонентами известным тождеством

$$e^{p\ln|x|} = |x^p|$$

Таким образом, можно считать, что степенная функция редуцирует некий гиперболический бином вида $\mathrm{sh}(p\ln|x|) + \mathrm{ch}(p\ln|x|) = e^{p\ln|x|} = |x^p|$

Возникают возможности введения различных вариантов функциональных биномов с редуцирующими их степенными функциями. При этом мультипликативные действия с такими функциями также удобны, как и с показательными (экспонентами). Умножение и деление, возведение бинома в степень, извлечение корня, логарифмирование бинома осуществляются элементарным путем. Обратный переход от редуцирующего одночлена к соответствующему результирующему биному элементарно прост. Образующие бином функции достаточно просты.

19. Общие замечания.

1.Экспоненты и степенные функции обычно не рассматриваются как периодические. Однако их нетрудно обобщить и представить в периодической форме

2.Ранее рассмотренная тригонометрическая форма приведения вещественных биномов широко используется в алгебре комплексных чисел и в других разделах математики. В физике она используется при описании периодических и волновых процессов. Гиперболическое приведение биномов создает новые возможности использования в этих областях.

Литература:

1.Понтрягин Л.С. Обобщение чисел. 1986. Москва. Наука. Изд. ф-м. лит.

2.Кокотов Ю.А. Соответствие вещественных и комплексных пространств. Меж алгебраические операции соответствия.2019. EESJournal. 1 (41),22.