ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 536.2(075)

Получение аналитических решений задач теплопроводности на основе ортогональных методов взвешенных невязок

Клеблеев Руслан Мухтарович, аспирант
Бранфилева Анастасия Николаевна, кандидат технических наук, доцент
Кузнецова Анастасия Эдуардовна, кандидат технических наук, старший преподаватель
Коробовцев Денис Сергеевич, магистрант
Коробовцева Евгения Алексеевна, магистрант
Самарский Государственный Технический Университет

Получено приближенное аналитическое решение краевой задачи нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины на основе использования дополнительной искомой функции, характеризующей изменение температуры в центре пластины. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением теплопроводности, температура в центре пластины будет изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. В связи с чем, диапазон ее временного изменения включает весь диапазон времени нестационарного процесса $0 < F_0 < \infty$ *и весь диапазон изменения температуры* $0 < \theta < 1$. *Использование дополнительной искомой функции позволяет сводить решение исходного уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.*

Ключевые слова: *задача нестационарной теплопроводности, бесконечная пластина, аналитическое решение, ортогональные методы, дополнительная искомая функция, бесконечная скорость распространения теплоты.*

Классические аналитические методы могут быть использованы для решения весьма малого круга задач с учетом ряда допущений (неучет нелинейности, переменности физических свойств), приводящих к существенному отличию получаемых результатов от реальных физических процессов. В связи с чем, большой интерес представляют приближенные аналитические методы (ортогональные методы Л.В. Канторовича и Бубнова-Галеркина, интегральный метод теплового баланса и др.), основное преимущество которых состоит в их простоте и универсальности, что объясняется возможностью сведения дифференциальных уравнений в частных производных к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. [1 – 10]. Однако эти методы сложны, и они пока еще недостаточно разработаны применительно к решению дифференциальных уравнений, не поддающихся разделению переменных. В связи с чем, интерес представляет разработка методов, позволяющих получать приближенные аналитические решения сложных краевых задач, с точностью, достаточной для инженерных приложений. К числу таких методов относится и используемый в настоящей работе метод, основную идею которого рассмотрим на примере решения задачи нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial\theta(\xi,Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\theta(\xi,Fo)}{\partial\xi^2}, (\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1) \tag{1}$$

$$\theta(\xi,0) = 1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta(0,Fo)}{\partial\xi} = 0; \tag{3}$$

$$\theta(1,Fo) = 0, \tag{4}$$

где $\theta = \frac{(T-T_{\text{ст}})}{(T_0-T_{\text{ст}})}$; $\xi = \frac{x}{\delta}$; $Fo = \frac{at}{\delta^2}$; $\theta,\ \xi, Fo$ – соответственно безразмерные температура, координата, время (число Фурье); x – координата, t – время; a – коэффициент температуропроводности; δ – половина толщины пластины; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки при $x = \delta$.

Введем дополнительную искомую функцию, характеризующую изменение от времени температуры в центре пластины:

$$q(Fo) = \theta(0,Fo). \tag{5}$$

Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением (1), температура в точке ξ=0 будет изменяться сразу после приложения граничного условия (4) на поверхности пластины. Следовательно, временной диапазон изменения функции $q(Fo)$ будет включать весь диапазон времени нестационарного процесса $0 < Fo < \infty$ и весь диапазон изменения температуры $0 < \theta < 1$. Так как температура в точке ξ=0 является искомой величиной задачи (1) – (4), то ее отдельное рассмотрение никоим образом этой задачи не изменяет и является лишь дополнительным средством упрощения процесса получения ее аналитического решения.

Решение задачи (1) – (4) принимается в виде

$$\theta(\xi,Fo) = q(Fo)\varphi(\xi), \tag{6}$$

где $\varphi(\xi) = 1 - \xi^2$ – координатная функция.

Очевидно, что соотношение (6) удовлетворяет граничным условиям (3), (4). Для определения неизвестной функции $q(Fo)$ в нулевом приближении найдем интеграл невязки уравнения (1) в пределах толщины пластины:

$$\int_0^1 \frac{\partial\theta(\xi,Fo)}{\partial Fo}d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2\theta(\xi,Fo)}{\partial\xi^2}d\xi. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получаем

$$\frac{dq(Fo)}{dFo}\int_0^1(1-\xi^2)d\xi + 2q(Fo)\int_0^1 d\xi = 0. \quad (8)$$

Определяя интегралы в (8) относительно неизвестной функции $q(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq(Fo)}{dFo} + 3q(Fo) = 0. \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), находим

$$q(Fo) = Ce^{-3Fo}, \quad (10)$$

где С – постоянная интегрирования.

Подставим (10) в (6)

$$\theta(\xi,Fo) = \mathrm{C}e^{-3Fo}\varphi(\xi). \quad (11)$$

Для определения постоянной С найдем интеграл невязки начального условия

$$\int_0^1(\theta(\xi,0)-1)d\xi = 0. \quad (12)$$

Подставим (11) в (12)

$$\int_0^1(\mathrm{C}(1-\xi^2)-1)d\xi = 0. \quad (13)$$

Определяя интеграл в (13) получаем $\mathrm{C} = 1{,}5$. Соотношение (11) с учетом найденного значения постоянной интегрирования будет

$$\theta(\xi,Fo) = 1{,}5e^{-3Fo}(1-\xi^2). \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет аналитическое решение задачи (1) – (4) в нулевом приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4) и приближенно уравнению (1) и начальному условию (2). Результаты расчетов по формуле (14) в сравнении с точным решением [10] приведены на рис.1. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне $0{,}2 \le Fo \le 1{,}0$ их расхождение находится в пределах 5%.

Для получения решения в первом приближении составим невязку уравнения (1) и потребуем выполнения ортогональности невязки к координатной функции $\varphi(\xi)$

$$\int_0^1 \frac{\partial\theta(\xi,Fo)}{\partial Fo}\varphi(\xi)d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2\theta(\xi,Fo)}{\partial\xi^2}\varphi(\xi)d(\xi). \quad (15)$$

Подставляя (6) в (15), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(Fo)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq(Fo)}{dFo} + \frac{5}{2}q(Fo) = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (16), находим

$$q(Fo) = \mathrm{C}e^{-2{,}5Fo} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (6), получаем

$$\theta(\xi,Fo) = \mathrm{C}e^{-2{,}5Fo}(1-\xi^2) \quad (18)$$

Для определения постоянной интегрирования составим невязку начального условия и потребуем выполнения ее ортогональности к координатной функции $\varphi(\xi)$

$$\int_0^1(\theta(\xi,0)-1)(1-\xi^2)d\xi = 0 \quad (19)$$

Подставим (18) в (19)

$$\int_0^1(\mathrm{C}(1-\xi^2)-1)(1-\xi^2)d\xi = 0 \quad (20)$$

Соотношение (20) после определения интегралов представляет алгебраическое линейное уравнение относительно С, из решения которого находим $\mathrm{C} = 1{,}25$. Соотношение (18) с учетом найденного значения постоянной интегрирования принимает вид

$$\theta(\xi,Fo) = 1{,}25e^{-2{,}5Fo}(1-\xi^2) \quad (21)$$

Соотношение (21) представляет решение задачи (1) – (4) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (21) в сравнении с точным решением [10] дано на рис.1. Из их анализа следует, что расхождение с точным решением уменьшилось с 5% в нулевом приближении до 2% – в первом.

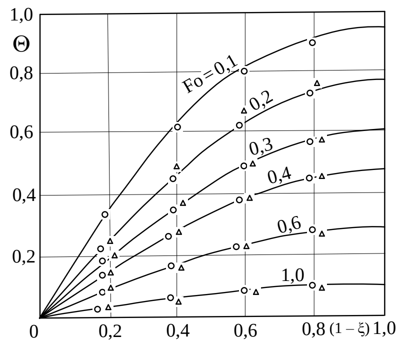

Рис.1. Изменение температуры в пластине.

Δ – по формуле (14); ○ – по формуле (21); ——— – точное решение [10]

Выводы

1. Используя дополнительную искомую функцию в ортогональном методе взвешенных невязок, получено приближенное аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины, при симметричных граничных условиях первого рода.

2. Применение дополнительной искомой функции, характеризующей температуру в центре пластины, позволяет сводить решение исходного уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего изменение этой функции во времени.

3. Ввиду отсутствия необходимости непосредственного интегрирования исходного дифференциального уравнения по пространственной переменной, заменив его выполнением определенного в пределах толщины пластины уравнения (интеграла теплового баланса), имеется возможность применения рассматриваемого метода для решения уравнений со сложными дифференциальными операторами, к которым не могут быть применены методы разделения переменных и операционные методы (нелинейные, с переменными физическими свойствами среды и др.).

Литература:

1.Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.

2.Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 470 с.

3.Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. Проблемы теплообмена. Сборник научных трудов. М.: Атомиздат, 1967. С.41 – 96.

4.Кот В.А. Метод взвешенной температурной функции. Инженерно – физический журнал. 2016. Т. 89, № 1. С.183 – 202.

5.Кудинов А.А., Кудинов В.А. Теплообмен в многослойных конструкциях. Инженерные методы. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1992. 138 с.

6.Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. Инженерно – физический журнал. Т. 82, № 3, 2009. С. 540 – 558.

7.Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности. Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 4. С.556 – 563.

8.Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В., Еремин А.В. Об одном методе решения нестационарных краевых задач. Инженерно – физический журнал. Т. 90, № 6, 2017. С.1387 – 1397.

9.Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. № 5. 1970, С.109 – 150.

10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

11. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в задачах теории теплопроводности. Известия вузов. Математика, № 4, 2010. С. 63 – 71.

12. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Минск: Белорусская наука, 2005. 560 с.