www.esa-conference.ru

УДК 517.928

Элементы категории уравнений и приложения

Кененбаева Г.М.
Институт математики НАН КР
Аскар кызы Лира
Султанкул кызы Айнура
Кыргызский Национальный университет им.Ж.Баласагына

Аннотация. *В различных разделах математики возникает понятие “уравнение”. Цель статью является с помощью понятия “предикат” объединить эти понятия и построить элементы категории уравнений на основе известных категорий. В статье введено новое общее понятие уравнения и построены элементы категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач.*

Ключевые слова: *категория, морфизм, уравнение, предикат, решение.*

Abstract. *In various sections of mathematics, the concept of "equation" arises. Purpose of the article: using the concept of “predicate”, combine these concepts and construct elements of the category of equations based on known categories. The article introduces a new general concept of an equation and builds elements of the category of equations, with its objects and morphisms and its subcategories, including both known types of problems for various equations and new types of mathematical problems.*

Keywords: *category, morphism, equation, predicate, solution.*

Введение

В настоящее время многие разделы математики успешно изучаются в рамках теории категорий, поскольку она рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

В различных разделах математики возникает понятие «уравнение». Но раньше были построены только категории отдельных видов уравнений, см. например [2]. Вместе с тем, известен и используется в математике для доказательств тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений, созданный в Кыргызстане метод дополнительного аргумента и др. показывают, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах. Поэтому целью настоящей работы является расширение понятия «уравнение» с включением понятий «система уравнений», «уравнение с дополнительными условиями» для строгого и единообразного описания упомянутых методов и формулировка основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями.

Приведем известные сведения из теории категорий

О п р е д е л е н и е 1.1. Категория K задаётся

1) Совокупностью объектов $Ob(K)$ (будем обозначать их буквами A, B, C);

2) Совокупностью морфизмов $Mor(K)$ (будем обозначать их буквами f, g, h,. ..);

3) Операциями dom и cod, которые сопоставляют каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \to B$. В этом случае говорят, что f — морфизм из A в B.

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g, таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g\circ f:A\to C$ (она называется композицией g и f).

5) Операцией I, которая по каждому объекту A выдаёт некоторый морфизм $I_A:A\to A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в Bв категории K обозначается $K(A, B)$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f:A \to B; g:B\to C; h:C \to D$ выполнено равенство $(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f : A \to B$ выполнены равенства $f\circ I_A = f, I_B\circ f = f$.

П р и м е ч а н и е. С теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики.

О п р е д е л е н и е 1.2. Категория K называется локально малой, если $K(A, B)$ является множеством для любых A и B.

О п р е д е л е н и е 1.3. Категория K называется малой, если $Mor(K)$ (то есть, объединение всех $K(A, B)$) является множеством.

О п р е д е л е н и е 1.4. Морфизм $f : A \to B$ называется изоморфизмом, если существует морфизм $g : B \to A$ со свойствами $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$. Такой морфизм g называется обратным к f.

О п р е д е л е н и е 1.5. Объекты A и B называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \sim= B$ (транзитивное отношение).

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

Категория функций (операторов, преобразований, отображений). Она упоминается в литературе, но для нее не введено обозначения, и мы не нашли ее формального описания. Мы предлагаем *Func*. *Ob(Func)* = *Mor(Set)*, *Mor(Func)* – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории используются в различных разделах математики.

Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории используются, в том числе, для определения корректности задач, в том числе в категории уравнений, которую мы предлагаем в настоящей работе, и ее подкатегории - интегральных уравнений.

Изучение топологических пространств с использованием методов теории категорий известно, как категорная топология.

Категория равномерных пространств *Unif*. *Ob(Unif)* - равномерные пространства, *Mor(Unif)* - равномерно непрерывные отображения.

2. Определение категории уравнений и ее подкатегорий

В различных разделах теории динамических систем рассматриваются дифференциальные, интегральные, разностные, а также интегро-дифферен-циальные и другие типы уравнений, с начальными, краевыми, нелокальными условиями и другой дополнительной информацией, в различных функциональных пространствах. Для единообразного представления таких задач, а также для более систематического применения и обобщения известных методов предлагается применить подход теории категорий.

Категорию уравнений будем обозначать *Equa*.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Ob(Equa)* - наборы {непустые множества X, Y, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B: X \to Y$}.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ будем называть такое $y \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x) \wedge (y = B(x)))$.

В частности, если B- тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения *“P(x)”*.

Mor(Equa) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Примеры морфизмов:

П р и м е р 2.1. Преобразование исходного множества. Множество X заменяется на множество X_1 такое, что $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X_1: P(x)\}$.

П р и м е р 2.2. Преобразование решения. Вводится биективная функция $\varphi: X \to X$. Задача $\{X, Y, P, B\}$ преобразуется к решению уравнения “$P(\varphi(z)), z \in X$” и вычислению $y = B(\varphi(z))$.

П р и м е р 2.3. Преобразование уравнения. Вводится такой предикат P_1, что либо $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X: P_1(x)\}$, либо (более общий, но более сложный метод) $\{x \in X: P(x)\} \subset \{x \in X: P_1(x)\}$. В последнем случае должна быть изменено преобразование B так, чтобы отбрасывать решения из $\{x \in X: P_1(x)\} \setminus \{x \in X: P(x)\}$.

Подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

О п р е д е л е н и е 2.2. *Ob(Equa-Func)* - наборы $\{X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B: X \to Y\}$. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие: кроме общих Примеров 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

П р и м е р 2.4. Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t = \psi(s)$, обозначается $z(s) = x(\psi(s))$ из нового пространства функций Z и вводится предикат P_1, такие, что $\{x \in X: P(x)\} = \{z \in Z: P_1(z)\}$.

Категория уравнений с непрерывными обобщенными предикатами.

О п р е д е л е н и е 2.3. *Ob(Equa-Top)* - наборы {топологические пространства X, Y, функция - обобщенный предикат $P(x)$ на X, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B: X \to Y$}, при условии, что при непрерывном переходе в X функция $P(x)$ меняет значения только на соседние}. (Такую функцию предлагается называть обобщенно-непрерывной).

Mor(Equa-Top) - ретракты топологического пространства X так, что сохраняется область со значением «истина».

Простой пример такого определения:

П р и м е р 2.5. Функция $P(x)$ принимает значения, соседние между собой следующим образом: «минус»-«истина»-«плюс». Если пространство X связно, то

$((\exists x \in X)(P(x) = \text{«минус»}) \wedge (\exists x \in X)(P(x) = \text{«плюс»})) \Rightarrow (\exists x \in X)(P(x) = \text{«истина»})$.

Более сложный пример - компьютерная реализация принципа ненулевого вращения на плоскости с помощью интервального анализа [3].

П р и м е р 2.6. Функция $P(x)$ принимает пять значений, по квадрантам координатной плоскости и в начале координат (истина). Связность между ними определяется следующим образом:

II		–		I
	\		/	
|		истина		|
	/		\	
III		–		IV

На плоскости определяется некоторый замкнутый контур и точка на нем. Первоначальное значение «суммы» полагается равным 0. Каждый переход против часовой стрелки дает (+1) в «сумму», по часовой стрелке - (–1) в «сумму». Если полный обход по контуру не дает значений «истина» и дает ненулевую «сумму» (кратную 4), то внутри контура существует точка x_0, где P(x_0)=«истина».

Для уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.4. *Ob(Equa-Par)* - наборы *{*непустые множества *X, F, Y,* предикат *P(x,f)* на *X×F,* преобразование *B:X→Y}.*

Решением уравнения *{X, F, Y, P, B}* для любого *f∈F* будем называть такое *y(f)∈Y,* что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x)))$.

В частности, если *B*- тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x,y)".*

Mor(Equa-Par) - это такие преобразования наборов *{X, Y, P, B}* *(*кроме *F),* что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Для корректных уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.5. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы *{*топологические пространства *X, F, Y,* предикат *P(x,f)* на *X×F,* непрерывное преобразование *B:X→Y}.* При этом 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\,(P(x,f)\wedge(y=B(x)))$;

2)*y* непрерывно зависит от *f.*

Mor(Equa-Par-Top) – преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

В частности, если предикат записывается в виде *P(x,f) =" A(x)=f",* где *A*- некоторый оператор, то получаем «корректность по Адамару».

П р и м е ч а н и е. Обычно под словом «параметр» понимается «числовой параметр». В данном определении это понятие используется более широко - корректность по различным объектам, всходящим в условие задачи, как это было предложено в [4].

Подкатегорией всех упомянутых категорий является категория корректных уравнений для функций с параметрами, которую можно обозначить *Equa-Func-Par-Top.*

Литература:

1.Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат диссертации к.ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.

2.Rosickэ J. Equational categories // Cachiers de topologieetgйomйtriediffйrentiellecatйgoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.

3.Кененбаева Г.М. Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам/ Г.М.Кененбаева. - Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н., 05.13.16. - Новосибирск, 1991. - 16 с.

4.Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика. - Киев: Наукова думка, 1976. - 270 с.