

## Квазигеострофическое приближение практических расчетов вихря и дивергенции поля ветра в задаче прогноза осадков

Иванов Борис Николаевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент  
Дальневосточный федеральный университет, (г. Владивосток)

В работе рассматривается практическая модель оперативного расчета наиболее вероятных зон выпадения атмосферных осадков. В основу расчетов положено квазигеострофическое приближение состояния воздушных потоков атмосферы земли. В этом приближении осуществляются расчеты вихря и дивергенции поля ветра, которые и позволяют судить о вертикальной структуре воздушных масс и зонах выпадения осадков. Большое внимание уделяется форме представления результатов вычислений для практического их использования в оперативной работе.

**Ключевые слова:** вихрь ветра, дивергенция ветра, изаллобарический ветер.

**1. Введение.** Важной задачей прогноза погоды, является определение поля вертикальных движений атмосферы, обусловленные не стационарностью крупномасштабных воздушных течений. Восходящие движения приводят к образованию осадков и играют существенную роль в развитии фронтов, циклонов и антициклонов [1, стр. 208]. Прямым измерениям вертикальные движения не поддаются, но их можно определить по известным особенностям распределения давления, геопотенциала. На синоптических картах можно наблюдать хорошо выраженные динамические системы, в которых преобладает горизонтальное движение воздушных масс. Эти движения определяют состояния, близкие к равновесию между горизонтальной составляющей силой барического градиента и силой Кориолиса, возникающей из-за вращения Земли. Скорость ветра, рассчитанная на основе такого равновесия, называется *скоростью геострофического ветра*, а состояние — *геострофическим*. Наблюдения показывают, что отклонения действительного ветра от геострофического обычно настолько малы, что в повседневном анализе синоптических карт ими можно пренебречь. Тем не менее при решении многих задач эти малые отклонения и их пространственное распределение приобретает первостепенное значение.

В данной работе рассматривается практическая модель квазигеострофического состояния воздушных масс атмосферы Земли. На основе квазигеострофического приближения выполняются расчеты, с целью выделения наиболее вероятных зон выпадения атмосферных осадков. Все вычисления ориентированы на их использование в оперативной работе в рамках программного комплекса ГИС ОКЕАН [2]. Основной поток входной информации составляют фактические и прогностические данные полей давления и геопотенциала на стандартных высотах от мировых прогностических центров.

**2. Уравнения движения воздушных масс.** Вывод основных уравнений движения воздушных масс можно найти в работе [3, стр. 94]. В нашем случае воспользуемся уравнением движения, отнесенным к единице массы, относительно вращающейся Земли:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\bar{\Omega} \times \bar{V} - \nabla \Phi + \alpha \bar{F} \quad (1)$$

где ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на север, ось  $z$  — в зенит;  $\bar{u} = (u, v, w)$  — вектор скорости;  $\bar{\Omega} = (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$  — вектор угловой скорости вращения Земли;  $\alpha = 1/\rho$  — объем, занимаемый единицей массы,  $\rho$  — плотность;  $\nabla p$  — сила барического градиента, отнесенная к единице объема;  $\bar{F}$  — сила трения, отнесенная к единице объема;  $\nabla \Phi = \bar{g}$  — сила тяжести;  $\Phi = gz$  — геопотенциал. В компонентах уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega(\cos \varphi \cdot w - \sin \varphi \cdot v) + \alpha F_x, \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \cdot u + \alpha F_y, \\ \frac{dw}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cos \varphi \cdot u - g + \alpha F_z. \end{cases} \quad (2)$$

**3. Порядок величин.** Величины различных членов в уравнениях (2) сильно меняются в зависимости от типов движения, поэтому при решении многочисленных задач могут быть введены значительные упрощения без нарушения их существенных характеристик. Члены, содержащие давление, всегда важны, так как помимо всего прочего, каждая частица должна двигаться более или менее независимо от соседних частиц. Следовательно, по крайней мере в каждом из таких уравнений должен быть один из таких членов, сравнимый по величине с соответствующим барическим слагаемым. Если пренебречь силами трения (в свободной атмосфере силы трения малы или пренебрежимо малы), то уравнения (2) содержат лишь два независимых параметра  $\Omega$  и  $g$ , которые можно использовать в качестве эталонов для сравнения других членов уравнений.

Так скорость вращения земли определяется формулой

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \text{ час}} = 7,29221 \cdot 10^{-5} \text{сек}^{-1} \text{ и } g = 0,98 \text{ м/сек}^2. \quad (3)$$

В третьем уравнении системы (2) для составляющей скорости ветра  $u = 100 \text{ м/сек}$  (что очень много), слагаемое  $2\Omega \cos \varphi u$  будет лишь порядка  $10^{-3}$ , что много меньше  $g$ . Вертикальное ускорение  $dw/dt$  в крупномасштабных движениях существенно меньше слагаемого  $2\Omega \cos \varphi u$ , содержащего силу Кориолиса.

Вертикальная составляющая скорости  $w$  редко превышает 1% от величины составляющей  $v$ , в то время как порядок величин  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  совпадает. Отсюда допустимо отбросить слагаемое  $2\Omega \cos \varphi w$  в первом уравнении системы (2). В указанных предположениях система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin \varphi \cdot v, \\ \frac{dv}{dt} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \cdot u \\ 0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g \text{ или } 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g. \end{cases} \quad (4)$$

Последнее уравнение в (4) хорошо известно, как основное уравнение статики [7, стр. 24]. Систему уравнений (4) удобно записывать в векторной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = -\alpha \nabla p - f \cdot \bar{k} \times \bar{u}, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\bar{k} = (0,0,1)$  — координатный вектор;  $f = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса;  $\bar{u} = (u, v, 0)$  — горизонтальный вектор скорости;  $\nabla p = (\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, 0)$  — горизонтальный градиент давления.

**4. Уравнения в изобарических координатах.** В уравнениях (5) независимыми переменными выступают  $(x, y, z)$ . В системе изобарических координат в качестве независимых переменных выступают  $(x, y, p)$ . Переход к данным координатам можно найти в работе [1, стр. 30]. Пусть теперь  $z = Z(x, y)$  обозначает высоту поверхности (изобарической), вдоль которой  $p(x, y, z)$  постоянно. Выразим  $p$  через  $Z$  в предположении, что выполняется  $\partial p/\partial z = -\rho g$  — основное уравнение статики. Рассмотрим выражение дифференциала  $dp = \nabla p \cdot d\bar{r} = \partial p/\partial x dx + \partial p/\partial y dy + \partial p/\partial z dz$ . Для высоты изобарической поверхности  $dz = \nabla Z \cdot (dx, dy) = \partial Z/\partial x dx + \partial Z/\partial y dy$ . Пусть изменение вектора  $d\bar{r}$  идет вдоль изобарической поверхности, тогда  $dp = 0$  или  $dp = \nabla p \cdot d\bar{r} = \partial p/\partial x dx + \partial p/\partial y dy + \partial p/\partial z dz = \partial p/\partial x dx + \partial p/\partial y dy - \rho g dz = (\partial p/\partial x dx + \partial p/\partial y dy) - \rho g(\partial Z/\partial x dx + \partial Z/\partial y dy) = 0$ .

$$\alpha \nabla p = g \nabla Z = \nabla H, \quad (6)$$

где  $\nabla$  — действие символа носит горизонтальный характер;  $H = gZ$  — геопотенциал изобарической поверхности ( $\text{м}^2/\text{сек}^2$ ). С учетом (6) запишем уравнение (5) в изобарических координатах:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times \bar{u}, \quad (7)$$

где  $\nabla H = (\partial H/\partial x, \partial H/\partial y, 0)$  — горизонтальный градиент геопотенциала.

**5. Геострофическое приближение.** В основе геострофического приближения лежит предположение об установившемся решении системы уравнений (7). Установившееся состояние, отвечающее такому решению, не должно зависеть от времени. Данное приближение основано на предположении, что ускорение  $d\bar{u}/dt$  гораздо меньше, чем ускорение Кориолиса  $f \cdot \bar{k} \times \bar{u}$ , или  $\left| \frac{d\bar{u}}{dt} \right| \ll |f \cdot \bar{k} \times \bar{u}|$ . Оценим порядок указанных величин и степень применимости данного ограничения. Запишем данное ограничение в конечных разностях:

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot |\Delta \bar{u}| \ll f \cdot |\bar{u}| \text{ или } |\Delta \bar{u}| \ll \Delta t \cdot f \cdot |\bar{u}|. \quad (8)$$

Справедливое ограничение  $|\Delta \bar{u}| < |\bar{u}|$  необходимо приводит к выполнению условия  $\Delta t \cdot f \geq 1$ . Условие  $\Delta t \cdot f \geq 1$  выступает в качестве принципа неопределенности, выполнение которого обеспечивает течение атмосферных процессов в геострофическом приближении. Условие неопределенности  $\Delta t \cdot f \geq 1$  устанавливает границу  $\Delta t \geq f^{-1}$  величины интервала  $\Delta t$  применимости *геострофического приближения*. Такой интервал  $\Delta t$  должен быть в пределах зависимых состояний моделируемых процессов. Оценим величину интервала  $\Delta t$  применимости на широте  $45^\circ$ :

$$\Delta t \geq f^{-1} = \frac{1}{2\Omega \sin \varphi} = \frac{1}{2(2\pi/24 \text{ часа}) \sin 45} = 2,7 \text{ часа}. \quad (9)$$

Практические расчеты зависимых состояний по времени для аэрологических наблюдений выполняются с интервалом  $\Delta t = 12$  часов, что в полной степени дает основание считать  $\Delta t \cdot f \geq 1$ . Таким образом, наблюдая состояния атмосферы с интервалом 12 часов, мы будем наблюдать атмосферу в состоянии ее геострофического баланса с учетом прошедших в ней изменений.

Уравнение движения (7) геострофического баланса примет вид

$$0 = -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times \bar{u}_g. \quad (10)$$

Заметим, что для любых векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  выполняется свойство  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c})$  [8, стр. 63]. В случае  $(\bar{k} \times \bar{a}) \times \bar{k} = \bar{a}(\bar{k} \cdot \bar{k}) - \bar{k}(\bar{a} \cdot \bar{k})$  и если  $(\bar{a} \cdot \bar{k}) = 0$ , то  $(\bar{k} \times \bar{a}) \times \bar{k} = \bar{a}$ . В нашем случае вектора  $\bar{u}_g$  и  $\bar{k}$  ортогональные. Тогда из (10) имеем  $\nabla H \times \bar{k} = -f \cdot (\bar{k} \times \bar{u}_g) \times \bar{k} = -f \cdot \bar{u}_g(\bar{k}, \bar{k}) + \bar{k}(\bar{u}_g, \bar{k}) = -f \cdot \bar{u}_g$ . Отсюда

$$\bar{u}_g = -\frac{1}{f} \cdot \nabla H \times \bar{k} = -\frac{1}{f} \cdot \nabla \times (H\bar{k}). \quad (11)$$

Численные расчеты выполняются на сеточной области. Из (11) величина  $\bar{u}_g$  при изменении геопотенциала вдоль одной из осей оценивается как  $|\bar{u}_g| \approx \frac{1}{f} \frac{|\Delta H|}{\Delta x}$ . Оценим размеры  $\Delta x$  (масштаб неопределенности) такой сетки в рамках геострофического приближения. Условие неопределенности (9) дает оценку интервала  $\Delta t \geq 3$  часа установления геострофического состояния. За время  $\Delta t = 3$  часа и скорости ветра  $|\bar{u}_g| = 10$  м/сек воздушные массы преодолеют расстояние  $\Delta x = |\bar{u}_g| \cdot \Delta t = \frac{10 \cdot 3600}{1853 \cdot 60} \cdot 3 = 1$  [градусы ДБК]. Это означает, что при проведении расчетов с шагом 3 часа заметные изменения во времени возможно увидеть лишь на сеточной области, шаг которой не превышает 1 градуса ДБК.

Практические прогнозы выпускают с шагом 12 часов (6 часов) — это интервал фактических аэрологических наблюдений. Для этого интервала величина шага сеточной области уже допустима  $\Delta x = |\bar{u}_g| \cdot \Delta t = 4$  [градусы ДБК]. Современные прогнозы выпускают на сеточной области 2,5 градуса, что вполне оправдывает проведения по ним геострофических расчетов ветра и других величин. В настоящее время прогностические центры погоды Брекнелл и Реддинг выпускают прогнозы давления и геопотенциала на градусную и полуградусную сетки.

**6. Квазигеострофические уравнения движения.** Механизм приспособления воздушных потоков к изменениям, которые происходят медленно (временной масштаб  $\Delta t \gg f^{-1}$ ), носит весьма специальный характер, и чрезвычайно важно понять природу таких медленных процессов приспособления. Наблюдения показывают, что отклонения действительного ветра от геострофического обычно настолько малы, что в повседневном анализе синоптических карт ими можно пренебречь. Как показано в работе [3, 388 стр.] при решении многих задач эти малые отклонения и их пространственное распределение могут приобретать первостепенное значение. Ключом к пониманию приспособления медленных процессов служит осознание переопределенности уравнений геострофического потока, т.е. того факта, что геострофическое течение в точности удовлетворяет уравнению неразрывности  $\nabla \cdot \bar{u}_g = \nabla \cdot \left( \frac{1}{f} \nabla \times (H\bar{k}) \right) = 0$ . Это означает, что геострофические уравнения не определяют воздушный поток и необходим анализ отклонений от геострофичности, даже если они и малы. Факт, что отклонения малы, определяет название такого рода движений как «квазигеострофических».

В системе геострофических движений не может быть восходящих и нисходящих потоков, так как здесь не происходит конвергенции или дивергенции, а следовательно, отсутствуют вертикальные движения и осадки, за исключением тех, которые могут порождаться рельефом или трением. Во всех проблемах, относящихся к развитию, дивергенция имеет большое значение. Подробное изложение дивергентной теории можно найти в работе [4, стр. 261]. Развитие таких циркуляционных систем как циклоны и антициклоны, в большей мере также определяется дивергенцией. К сожалению, величины дивергенции и вертикальных скоростей так малы, что выполнить их определение исключительно трудно.

Геострофическое приближение (11) не определяет вертикальную компоненту скорости ветра. Для определения вертикальных скоростей необходимо рассмотреть отклонения от геострофичности, даже если эти отклонения малы. Получим приближенные выражения для горизонтальных составляющих скоростей  $\bar{u} = (u, v, 0)$  через  $\bar{u}_g = (u_g, v_g, 0)$ . За основу возьмем уравнение (7). Имеем два уравнения  $\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times \bar{u}$  и  $0 = -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times \bar{u}_g$ . Их разность  $\frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times (\bar{u} - \bar{u}_g)$  и вторая производная  $\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = -\frac{d\nabla H}{dt} - f \cdot \bar{k} \times \frac{d\bar{u}}{dt}$ . В последнем уравнении избавимся от первой производной:  $\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = -\frac{d\nabla H}{dt} - f \cdot \bar{k} \times \left( -\nabla H - f \cdot \bar{k} \times (\bar{u} - \bar{u}_g) \right) = -\frac{d}{dt} \nabla H - f^2 \cdot (\bar{u} - \bar{u}_g)$ . Геострофическое приближение (11) получено в предположении (8)  $\left| \frac{d\bar{u}}{dt} \right| \ll \left| f \cdot \bar{k} \times \bar{u} \right|$ . Естественно предположить, что  $\left| \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} \right| \ll \left| f \cdot \frac{d}{dt} \bar{k} \times \bar{u} \right|$ . Это неравенство называется геострофическим приближением второго порядка, что хорошо согласуется с фактическим состоянием. Тогда  $0 = -\frac{d}{dt} \nabla H - f^2 \cdot (\bar{u} - \bar{u}_g)$  или  $\bar{u} = \bar{u}_g - \frac{1}{f^2} \frac{d}{dt} \nabla H$ . В линейном случае отклонение скорости от геострофического потока примет вид

$$\bar{u} = \bar{u}_g - \frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla H \text{ или } \bar{u} = \bar{u}_g - \frac{1}{f^2} \nabla \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right). \quad (12)$$

Контуры скорости изменения давления (геопотенциала)  $\partial H / \partial t$  называются изаллобарам. Величина  $\partial H / \partial t$  — это локальное изменение геопотенциала или его тенденция. Выражение (12) показывает, что ветер состоит из геострофического ветра, дующего вдоль изобар, и дополнительной составляющей, направленной в сторону изаллобарического понижения, сила которого пропорциональна градиенту изаллобар  $f^{-2} \partial H / \partial t$ . Сильный дождь над обширными областями объясняется конвергенцией компоненты  $f^{-2} \partial H / \partial t$ , т.е. существованием центров низких значений на изаллобарических картах. Введем обозначение для изаллобарической составляющей ветра:

$$\bar{J} = -\frac{1}{f^2} \nabla \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \bar{k} \times \left( -\frac{1}{f} \nabla \left( \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \times \bar{k} \right). \quad (13)$$

Шаблон определения геострофического ветра (11)  $\bar{u}_g = -\frac{1}{f} \nabla H \times \bar{k}$  и его направление позволяют утверждать, что вектор  $\bar{J}$  — это составляющая скорости ветра, вычисленная по тенденции геопотенциала  $f^{-1} \partial H / \partial t$ . Вектор  $\bar{I} = -\frac{1}{f} \nabla \left( \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \times \bar{k}$  имеет направление вдоль изаллобар (изолиний тенденции  $f^{-1} \partial H / \partial t$ ). Вектор  $\bar{J} = \bar{k} \times \bar{I}$  направлен в сторону изаллобарического понижения, т.е. к центру наибольшего уменьшения тенденции (центр наибольшего падения давления относительно предыдущего состояния по времени). Таким образом, изаллобарическая составляющая ветра  $\bar{u} = \bar{u}_g + \bar{J}$  создает конвергенцию воздушных потоков по направлению к изаллобарическому минимуму и дивергенцию по направлению к изаллобарическому максимуму.

Оценим порядок величины  $\left| f^{-1} \partial H / \partial t \right|$ . Практические расчеты выполним с интервалом по времени  $\Delta t = 12$  часов. Полагаем  $f^{-1} \partial H / \partial t = \frac{1}{f} \frac{\Delta_t H}{\Delta t} = \frac{1}{(2\pi/24 \text{ час})} \cdot \frac{\Delta_t H}{12 \text{ час}} = \frac{\Delta_t H}{\pi}$ . Оценим порядок величины вектора  $|\bar{J}|$ . Заметим, что  $|\bar{u}_g| = \left| -\frac{1}{f} \nabla H \right|$ , тогда  $|\bar{J}| = \left| -\frac{1}{f} \nabla \left( \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right| = \left| -\frac{1}{f} \nabla \left( \frac{\Delta_t H}{\pi} \right) \right| = \frac{1}{\pi} \left| \Delta_t \left( -\frac{1}{f} \nabla H \right) \right| = \frac{1}{\pi} |\Delta_t(u_g)|$ . Пусть величина изменения скорости  $|\Delta_t(u_g)|$  за время  $\Delta t = 12$  часов составляет  $0.3|u_g|$  (согласуется с реальными полями), тогда  $|\bar{J}| = 0.1|u_g|$ . Данный порядок величины  $|\bar{J}|$  убедительно показывает состоятельность выполнения практических расчетов изаллобарической составляющей поля ветра по фактическим и прогностическим полям давления и геопотенциала.

**7. Вихрь и дивергенция в квазигеострофическом приближении.** Сильные дожди над обширными областями в большинстве случаев объясняется конвергенцией изаллобарической компоненты  $|\bar{J}|$  ветра, т.е. существованием центров низких значений на изаллобарических картах. Согласно (12), имеем горизонтальную дивергенцию ветра в квазигеострофическом

приближении  $\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \bar{u}_g + \nabla \cdot \bar{J}$ , где  $\nabla \cdot \bar{u}_g = 0$  для геострофического ветра. Поэтому вклад в дивергенцию ветра в квазигеострофическом приближении дает только его изаллобарическая составляющая  $\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \bar{J}$ . С другой стороны, из (12) величина вихря скорости ветра определяется выражением  $\nabla \times \bar{u} = \nabla \times \bar{u}_g + \nabla \times \bar{J}$ . Градиентное поле — безвихревое  $\nabla \times \nabla H = 0$ . С учетом (13)  $\nabla \times \bar{J} = \nabla \times \left(-\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla H\right) = 0$ , тогда  $\nabla \times \bar{u} = \nabla \times \bar{u}_g$ . Таким образом, изаллобарическая составляющая  $\bar{J}$  скорости ветра  $\bar{u} = \bar{u}_g + \bar{J}$  не дает вклада в завихренность. Поле вихря ветра  $\nabla \times \bar{u}$  квазигеострофического приближения совпадает с полем вихря  $\nabla \times \bar{u}_g$  геострофического ветра.

Вычислим дивергенцию в квазигеострофическом приближении:  $\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \bar{J} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla H\right) = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot (\nabla H)) = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (-f \cdot \bar{k} \times \bar{u}_g) = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{u}_g) \cdot \bar{k}$ . Последнее выражение показывает, что дивергенция  $\nabla \cdot \bar{u}$  в квазигеострофическом приближении — это тенденция вихря  $\nabla \times \bar{u}_g$  что во многом объясняет соотношение их величин  $|\nabla \cdot \bar{u}_g| \ll |\nabla \times \bar{u}_g|$ .

**8. Практическое вычисление дивергенции.** Точность вычисления дивергенции  $\nabla \cdot \bar{u}$  занимает важное место в приложениях. Вернемся к квазигеострофическому приближению дивергенции в нелинейном случае:

$$\nabla \cdot \bar{u} = \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{1}{f^2} \frac{d}{dt} \nabla^2 H = -\frac{1}{f} \frac{d}{dt} (\nabla \times \bar{u}_g) \cdot \bar{k}. \quad (14)$$

апишем расчетную формулу с учетом конвективной составляющей  $\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 H - \frac{1}{f^2} \bar{u}_g \nabla (\nabla^2 H)$ . Вычисление градиента можно записать как  $\nabla (\nabla^2 H) \cong \Delta (\nabla^2 H) / \Delta x$ . Тогда нелинейный член  $\frac{1}{f^2} \bar{u}_g \nabla (\nabla^2 H)$  можно вычислить как  $\frac{1}{f^2} |\bar{u}_g| \Delta (\nabla^2 H) / \Delta x$ . Для  $|\bar{u}_g| = 10$  м/сек,  $\Delta t = 12$  час и  $\Delta x = 2.5$  градусов имеем  $\frac{|\bar{u}_g|}{f^2 \Delta x} = \frac{10 \text{ м/сек}}{f^2 \cdot 2.5 \cdot 60 \cdot 1853 \text{ м}} = \frac{3.6 \cdot 10^{-5}}{f^2}$ . Величина  $\frac{1}{f^2 \Delta t} = \frac{1}{f^2 \cdot 12 \cdot 3600 \text{ сек}} = \frac{2.3 \cdot 10^{-5}}{f^2}$ , а значит необходимо учитывать нелинейное конвективное слагаемое в (14) при расчете дивергенции.

**9. Уравнение неразрывности в изобарических координатах.** Общеупотребительная форма записи уравнения неразрывности [3, стр. 83] имеет вид  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{u} = 0$  или  $\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ . Удельный объем  $\alpha$  и плотность  $\rho$  связаны ем  $\alpha\rho = 1$ . Следовательно,  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$ , а значит уравнение неразрывности можно записать в виде  $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \bar{u}$ . Исследуем двумерное горизонтальное течение потока  $\bar{u} = (u_x, u_y)$ . Выделим бесконечно малый прямоугольный физический элемент  $\delta x \delta y$ . Линейные элементы  $\delta x$  и  $\delta y$  рассматриваем как физические элементы, соединяющие соседние частицы, и расширение этих элементов обусловлено только различием движений. С точностью до величин первого порядка малости относительно  $\delta x$  и  $\delta y$  изменение площади  $\delta x \delta y$  происходит за счет малых изменений длины сторон [1, стр. 139]. Поэтому скорость изменения площади  $\delta x \delta y$  составит  $\frac{d}{dt} (\delta x \delta y) = \delta y \frac{d}{dt} (\delta x) + \delta x \frac{d}{dt} (\delta y)$ , где  $\frac{d}{dt} (\delta x) = \delta \frac{d}{dt} (x) = \delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \delta x$ ,  $\frac{d}{dt} (\delta y) = \delta \frac{d}{dt} (y) = \delta u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} \delta y$ . Отсюда  $\frac{d}{dt} (\delta x \delta y) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\right) \delta x \delta y$ . Тогда для горизонтальной дивергенции  $\nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t}$  будет выполняться уравнение неразрывности  $\nabla \cdot \bar{u} = \frac{1}{\delta x \delta y} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y)$ .

Исходные данные аэрологического зондирования и прогностические поля геопотенциала представляются на изобарических поверхностях. Поэтому удобно использовать давление  $p$  вместо  $z$  в качестве вертикальной координаты. Будем полагать, что соотношение между  $p$  и  $z$  определяется основным уравнением статики. Рассмотрим элемент объема  $\delta x \delta y \delta z$ , содержащий массу  $\rho \delta x \delta y \delta z$ . Имеем уравнение статики  $\delta p = -g \rho \delta z$ , заменяя  $\rho \delta z$  на  $-\delta p / g$ , получим массу данного элемента  $\rho \delta x \delta y \delta z = -\delta x \delta y \delta p / g$ . Элемент объема  $\delta x \delta y \delta z$  движется, но его масса сохраняется, следовательно  $d(\delta x \delta y \delta p) / dt = 0$  или  $\frac{1}{\delta x \delta y} \cdot \frac{d}{dt} (\delta x \delta y) = -\frac{1}{\delta p} \cdot \frac{d}{dt} (\delta p)$ . Здесь  $\delta p$  может рассматриваться как физический элемент (воздушной массы), который расширяется со скоростью  $\frac{d}{dt} (\delta p) = \delta \frac{dp}{dt}$ . Обозначают  $\omega = \frac{dp}{dt}$  и рассматривают как скорость компоненты вдоль вертикальной оси  $p$  (вертикальные скорости). Уравнение неразрывности в изобарических координатах примет вид

$$\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (15)$$

где дивергенция определяет изменение вертикальной скорости  $\omega = dp/dt$ . Впервые уравнение неразрывности в виде (15) было получено в работе [5].

**10. Интерпретация карт величин дивергенции.** Имеем в изобарических координатах уравнение неразрывности  $\nabla \cdot \bar{u} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$ . Запишем его для слоя  $\Delta p$  в форме  $-\Delta \omega = (\nabla \cdot \bar{u}) \Delta p$ . Дивергенция  $\nabla \cdot \bar{u}$  слоя  $\Delta p$  показывает в среднем изменение вертикальной скорости (изменение скорости давления) данного слоя. Поэтому при построении карт (изолиний) величин дивергенции ее удобно масштабировать величиной слоя, умножая на  $\Delta p$ . Такая величина  $(\nabla \cdot \bar{u}) \Delta p$  будет отражать состояние слоя  $\Delta p$  атмосферы, в котором наблюдается величина изменения вертикальной скорости  $-\Delta \omega = (\nabla \cdot \bar{u}) \Delta p$ .

**11. Интерпретация карт величин вихря.** В работе [7, стр. 30] выполнено разложение вектора скорости воздушных масс на две составляющие:

$$d\bar{u} = \Phi \cdot d\bar{r} + \frac{1}{2} \nabla \times \bar{u} \cdot d\bar{r}. \quad (16)$$

Формула (16) определяет относительное перемещение *за единицу времени* различных точек бесконечно малого объема, окружающего рассматриваемую точку, в виде суммы двух членов, последний из которых дает поворот объема как целого, а первый определяет истинную деформацию объема.

Таким образом, величина вихря  $\nabla \times \bar{u}$  для произвольной точки  $M$  определяет угловую скорость  $(\nabla \times \bar{u})/2$  вращения бесконечно малого объема, окружающего данную точку  $M$ , в предположении, что в рассматриваемый момент времени этот объем жидкости внезапно отвердел. При построении карт (изолиний) величин вихря также удобно масштабировать значения величиной слоя  $\Delta p$  и строить поля изолиний для суммарного вихря слоя  $((\nabla \times \bar{u})/2)/\Delta p$ .

## 12. Расчетные карты вихря и дивергенции поля ветра.

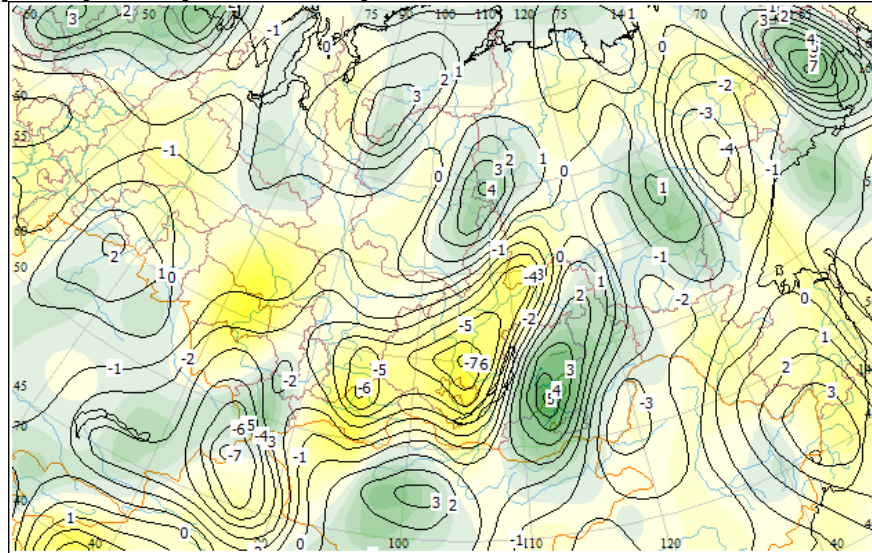


Рис. 1. Поле вихря и дивергенции

На рис. 1 представлены вихрь и дивергенция поля ветра, рассчитанные по полю геопотенциала 850 мб. Поле вихря дано в изолиниях, поле дивергенции также построено в изолиниях, которые заполнены градиентным цветом. Градиентное заполнение изолиний рассматривается в работе [5]. Градиентное цветное поле дивергенции дает распределение зон вертикальных движений воздушных масс на рассматриваемом уровне. Значения величин полей изолиний вихря и дивергенции приводятся к 100 мб толщине так, как рассмотрено в пунктах 10 и 11.

Практическая реализация расчета полей вихря и дивергенции выполнена в рамках программного комплекса ГИС ОКЕАН [2]. Формирование данного рода полей осуществляется в условиях динамических карт (рис. 1), которые допускают их просмотр в мультипликационном режиме. Именно данное свойство карт делает их практически значимыми и необходимыми в проведении анализа и прогноза погоды.

### Литература:

1. Петерсен С. Анализ и прогноз погоды. Ленинград: Гидрометеорологическое издательство, 1961.— 652 с.
2. Иванов Б.Н. Программный комплекс ГИС ОКЕАН обеспечения безопасности полетов и мореплавания, оценки состояния и прогноза погоды // Международный Научный Институт «Educatio». 2015, № 5 (12). — С. 133-135.
3. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.— т.1 — 398 с., т.2 — 416 с.
4. Зверев А.С. Синоптическая метеорология. Ленинград: Гидрометеорологическое издательство, 1968. — 774 с.
5. Sutcliffe R.C., Godard O.H. STDM 50, British Met. Office, 1942.
6. Иванов Б.Н. Структуры вложенности поля изолиний в задаче градиентного заполнения / Вычислительные методы и программирование. 2006. 7, № 1. С. 155–165. ([http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2006/v7r204.html](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2006/v7r204.html))
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.— 427 с.