ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

О якобианах некоторых инвариантных отображений пространства квадратных матриц

Илюшечкин Никита Васильевич, инженер
АО «Концерн «Моринформсистема – Агат», г. Москва

Рассматривается объём параллелепипеда, натянутого на функции от квадратной комплексной матрицы, определённые на её спектре. Находится выражение для этого объёма через сумму квадратов модулей якобианов некоторого инвариантного отображения матрицы.

Ключевые слова: *функция от матрицы, многомерный объём, якобиан, субдискриминанты.*

1. Введение

Символом $Mat_C(n)$ мы будем обозначать пространство квадратных комплексных матриц порядка n, которое в дальнейшем рассматривается как линейное пространство размерности n^2. Для наших целей удобно выбрать следующий базис этого пространства. Через E_{jl} будем обозначать матрицу порядка n, на пересечении строки с номером j и столбца с номером l которой стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Элементы этого базиса мы будем располагать в порядке

$$11, 12, \ldots, 1n, 21, 22, \ldots, 2n, n1, n2, \ldots, nn, \quad (1.1)$$

то есть по строкам. Пространство $Mat_C(n)$ можно сделать унитарным, если условиться, что рассмотренный только что базис является ортонормированным. В унитарном пространстве можно рассматривать объёмы различных фигур, в частности параллелепипедов.

Любую квадратную комплексную матрицу Z порядка n, рассматриваемую как вектор пространства $Mat_C(n)$, мы будем обозначать символом $\hat{Z}$. Координаты этого вектора (элементы матрицы Z) мы будем располагать в порядке (1.1). Тем самым мы отличаем матрицы от перечней их элементов. Напомним вкратце, что такое функция от матрицы, определённая на спектре этой матрицы. Соответствующее определение дано в [1, с. 96]. Для нас имеет значение, что, если $Z \in Mat_C(n)$, то функция F от матрицы Z представима многочленом h_F степени не более $n-1$ (интерполяционным многочленом Эрмита) от этой матрицы: $F(Z) = h_F(Z)$. При этом верно следующее. Пусть функция $F(\zeta)$ комплексного переменного ζ определена в области, содержащей все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы Z и представляется там сходящимся степенным рядом

$$F(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots. \quad (1.2)$$

Тогда значение функции F от матрицы Z может быть получено подстановкой Z вместо ζ в этот ряд:

$$F(Z) = c_0E + c_1Z + c_2Z^2 + \cdots \quad (1.3)$$

(E – единичная матрица).

Если $k \le n^2$ и матрицы $Z_1, \ldots, Z_k \in Mat_C(n)$, то объём параллелепипеда размерности k, натянутого на векторы $\widehat{Z_1}, \ldots, \widehat{Z_k}$, мы будем обозначать символом $V(\widehat{Z_1}, \ldots, \widehat{Z_k})$. Пусть теперь $F_1(\zeta), \ldots, F_k(\zeta)$ – функции, определённые на спектре матрицы Z. Значения $F_1(Z), \ldots, F_k(Z)$ этих функций являются векторами $\widehat{F_1(Z)}, \ldots, \widehat{F_k(Z)}$ пространства $Mat_C(n)$. Нас далее будет интересовать объём $V(\widehat{F_1(Z)}, \ldots, \widehat{F_k(Z)})$ параллелепипеда размерности k, натянутого на эти векторы. При этом, так как любое значение $F_\nu(Z)$ может быть найдено как многочлен степени менее n от Z, то при $k > n$ рассматриваемые векторы линейно зависимы и объём натянутого на них параллелепипеда равен нулю. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением значений $k \le n$.

Пусть Ω – какая-либо комплексная матрица размера $n^2 \times k$, где $k \le n$. Символом $\mathfrak{M}_k(\Omega)$ мы будем обозначать сумму квадратов абсолютных величин всех миноров порядка k этой матрицы. В [2, с.69] установлена формула

$$V^2\left(\widehat{F_1(Z)}, \ldots, \widehat{F_k(Z)}\right) = \mathfrak{M}_k\left(F_*(Z)\right), \quad (1.4)$$

где $F_*(Z)$ – матрица размера $n^2 \times k$, в столбце с номером $\nu = 1, \ldots, k$ которой стоят элементы матрицы $F_\nu(Z)$, взятые в порядке (1.1). Таким образом, строки матрицы $F_*(Z)$ мы будем нумеровать двумя числами j, l, которые соответствуют строке с номером j и столбцу с номером l матриц $F_\nu(Z)$. В [2, с. 69] доказано, что, если матрица $Z \in Mat_C(n)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все её собственные числа с учётом их кратностей, а функции $F_1(\zeta), \ldots, F_k(\zeta)$ определены на спектре этой матрицы, то справедлива оценка

$$V^2\left(\widehat{F_1(Z)}, \ldots, \widehat{F_k(Z)}\right) \ge \sum_{1 \le q_1 < \cdots < q_k \le n} \left| \begin{vmatrix} F_1(\lambda_{q_1}) & \cdots & F_k(\lambda_{q_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1(\lambda_{q_k}) & \cdots & F_k(\lambda_{q_k}) \end{vmatrix} \right|^2. \quad (1.5)$$

Это неравенство обращается в равенство, если матрица Z нормальна. В случае $k = n$ неравенство будет строгим при одновременном выполнении двух условий: его правая часть отлична от нуля и матрица Z не является нормальной. Отсюда (об этом ниже) могут быть выведены оценки сверху для субдискриминантов матрицы Z.

Статья посвящена преобразованию формулы (1.4) и выводу следствий из этого. Для простоты мы ограничимся случаем, когда все функции $F_1(\zeta), \ldots, F_k(\zeta)$ – целые, то есть определены и голоморфны на всей комплексной плоскости. Как будет показано ниже, в правой части формулы (1.4) матрицу $F_*(Z)$ можно заменить матрицей Якоби некоторого инвариантного отображения

$$\Phi: Mat_C(n) \longrightarrow C^k, \Phi(Z) = \left(f_1(Z), \ldots, f_k(Z)\right), \quad (1.6)$$

где все f_ν – голоморфные скалярные функции. Инвариантным мы будем называть отображение Φ, обладающее следующим свойством. Пусть $i_1(Z), \dots, i_n(Z)$ – инварианты матрицы Z, то есть, с точностью до знаков, – коэффициенты её характеристического многочлена. На каждую из функций $f_\nu(Z)$ мы налагаем требование, чтобы существовала такая голоморфная на C^n функция φ_ν от n комплексных переменных $i_1, \dots, i_n$, что для всех $Z \in Mat_C(n)$ справедливо равенство $f_\nu(Z) = \varphi_\nu(i_1(Z), \dots, i_n(Z))$.

2. О субдискриминантах квадратной матрицы

Напомним определение субдискриминантов произвольной квадратной матрицы. Пусть матрица $Z \in Mat_C(n)$, а $P = P_Z(\lambda)$ – её характеристический многочлен. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – полный набор корней этого многочлена с учётом их кратностей, то его субдискриминантом с номером k $sDis_k(P)$ называется выражение

$$sDis_k(P) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, \#(I)=n-k} \prod\nolimits_{(j,l) \in I, j<l} (\lambda_l - \lambda_j)^2,$$

где символ # обозначает число элементов конечного множества. Кроме того, по определению $sDis_{n-1}(P) = n, sDis_n(P) = 1$. Субдискриминанты являются симметрическими функциями от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, так что должны выражаться через элементы матрицы Z. Поэтому уместно ввести для них также обозначение $sDis_k(Z) = sDis_k(P)$ и называть субдискриминантами матрицы Z. Заметим также, что $sDis_0(Z)$ – это дискриминант матрицы Z, который мы будем обозначать более простым символом $Dis(Z)$.

Пусть $Z = (z_{jl})$ – матрица порядка n. Элементы её степени Z^ν для каждого $\nu = 0,1,2, \dots$ будем обозначать через $z_{jl}^{(\nu)}$. Из элементов матриц $E = Z^0, Z, \dots, Z^{n-1}$ можно образовать новую матрицу Z_* размера $n^2 \times n$, в столбце с номером ν которой стоят элементы матрицы Z^ν, взятые в порядке (1.1). Пусть также $Z_*(k)$ – подматрица матрицы Z_*, образованная её первыми k столбцами. Строка этой матрицы с номером jl состоит из элементов $z_{jl}^{(0)}, z_{jl}^{(1)}, \dots, z_{jl}^{(k-1)}$. Иными словами, $Z_*(k) = F_*(Z)$ при $F_1(\zeta) = 1, F_2(\zeta) = \zeta, \dots, F_k(\zeta) = \zeta^{k-1}$. Разумеется, $Z_*(n) = Z_*$. Минор порядка k матрицы $Z_*(k)$, образованный строками с двойными индексами $j_1 l_1, \dots, j_k l_k$, обозначим через $\langle j_1 l_1, \dots, j_k l_k \rangle(Z)$. В [2, с.71] из (1.5) была выведена оценка

$$|sDis_{n-k}(Z)| \le \mathfrak{M}_k(Z_*(k)), (2.1)$$

причём, как было показано в [3], это неравенство обращается в равенство по крайней мере в двух случаях: когда $k = n$ и матрица Z нормальна, и когда $k \le n$ и матрица Z эрмитова или косоэрмитова.

Равенство (2.1) в случае, когда рассматривается дискриминант и матрица Z вещественна и симметрична, установил Борхардт [4], и, позднее, охватив также случай эрмитовой матрицы – Ньюэл [5]. Это же равенство в случае, когда рассматриваются произвольные субдискриминанты, а матрица Z вещественна и симметрична, доказала Рой [6].

3. Об инвариантных отображениях пространства $\boldsymbol{Mat_C(n)}$

Можно считать, что элементы z_{jl} матрицы $Z \in Mat_C(n)$ – это n^2 независимых комплексных переменных. Мы будем рассматривать комплекснозначные функции $f: Mat_C(n) \longrightarrow C, f = f(Z) = f(z_{11}, \dots, z_{nn})$, которые предполагаем определёнными на всём пространстве $Mat_C(n)$ и голоморфными на нём. Для каждой такой функции можно рассмотреть её градиент $grad\ f$, который мы будем понимать как квадратную матрицу порядка n, элемент которой с индексом jl равен соответствующей частной производной $(grad\ f)_{jl} = \partial f / \partial z_{jl}$. Соответствующий этой матрице вектор-столбец мы будем обозначать символом $\widehat{grad}\, f = (\partial f/\partial z_{11}, \dots, \partial f/\partial z_{nn})^T$, где частные производные расположены в порядке (1.1).

Как уже упоминалось ранее, мы будем рассматривать только инвариантные функции $f(Z)$, голоморфно зависящие от инвариантов $i_1, \dots, i_n$ матрицы Z. Нам будет удобнее выражать эти функции даже не через инварианты $i_1, \dots, i_n$, а через суммы Ньютона $s_1(Z), \dots, s_n(Z)$ корней матрицы Z, где $s_m(Z) = \lambda_1^m + \dots + \lambda_n^m$. Формулы Ньютона [7, с. 29] позволяют выразить инварианты $i_1(Z), \dots, i_n(Z)$ как многочлены от сумм $s_1(Z), \dots, s_n(Z)$ и наоборот. Дальнейшие (при $m > n$) суммы Ньютона s_m могут быть последовательно выражены через суммы $s_1, \dots, s_n$ из соотношения $s_m - s_{m-1} i_1 + \dots + (-1)^n s_{m-n} i_n = 0$.

Мы будем использовать инвариантные функции следующего вида. Пусть $F(\zeta)$ – целая функция одного комплексного переменного. Тогда значение $F(Z)$ определено на всём пространстве $Mat_C(n)$. Функция $f(Z) = tr\ F(Z)$, где символ tr обозначает след матрицы, является инвариантной. В самом деле, функция $F(\zeta)$, будучи целой, представляется рядом (1.2), сходящимся на всей плоскости C. Из (1.3) следует, что след матрицы $F(Z)$ является суммой ряда $f(Z) = c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots$. Так же, как в [8, с. 27] можно доказать, что эта сумма голоморфна по переменным $s_1, \dots, s_n$ на пространстве C^n.

Наш интерес к следам голоморфных функций от матриц легко объясним. Имеет место следующая замечательная формула [9, с.12]. Если функция $F(Z)$ определена на спектре матрицы Z, то

$$grad\ tr\ F(Z) = F'(Z^T), (3.1)$$

где штрихом обозначена операция дифференцирования, а символом T – операция транспонирования. В частности, если $F(Z) = Z^m$, то $tr\ F(Z) = s_m(Z)$, и, следовательно, $grad\ s_m(Z) = m(Z^T)^{m-1}$. В координатах это равенство записывается так:

$$\partial \widetilde{s_m} / \partial z_{jl} = z_{lj}^{(m-1)}, (3.2)$$

где выражения $\widetilde{s_m} = s_m / m$ мы будем называть модифицированными суммами Ньютона.

4. Основные результаты

Все слагаемые правых частей соотношений (1.4) и (2.1) могут быть получены чисто алгебраическим путём из элементов матриц $F_\nu(Z)$ или Z^ν. Ниже мы увидим, что эти слагаемые можно получить и другим способом – как якобианы некоторых инвариантных отображений пространства $Mat_C(n)$ в пространство C^k. Итак, пусть заданы целые функции $F_\nu(\zeta)$ при $\nu = 1, \dots, k$, и пусть $\mathcal{F}_\nu(\zeta)$ – их первообразные на всей комплексной плоскости.

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

Введём обозначения $f_\nu(Z) = tr\,\mathcal{F}_\nu(Z)$ при тех же ν. Как было показано ранее, все функции f_ν являются инвариантными, то есть могут быть представлены в форме $f_\nu(Z) = \varphi_\nu(\widetilde{s_1}(Z), \dots, \widetilde{s_n}(Z))$, где каждая функция φ_ν голоморфна по переменным $\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_n}$ на всём пространстве C^n. Выбор модифицированных сумм Ньютона в качестве аргументов обусловлен простотой формул (3.2).

Рассмотрим отображение (1.6). Как мы сейчас увидим, матрица Якоби этого отображения тесно связана с матрицей $F_*(Z)$ из соотношения (1.4). Точнее, мы будем рассматривать матрицу $J_\Phi(Z)$, транспонированную к матрице Якоби этого отображения в точке Z. Эта матрица имеет размер $n^2 \times k$ и вследствие (3.1) состоит из столбцов $\widehat{F_1(Z^T)}, \dots, \widehat{F_k(Z^T)}$. В строке с номером jl матрицы $J_\Phi(Z)$ стоят элементы $\partial f_1/\partial z_{jl} = (F_1(Z))_{lj}, \dots, \partial f_k/\partial z_{jl} = (F_k(Z))_{lj}$. Таким образом,

$$J_\Phi(Z) = F_*(Z^T). \quad (4.1)$$

Теорема 1. *Пусть $F_1(\zeta), \dots, F_k(\zeta)$ – целые функции, $\Phi(Z)$ – определённое выше инвариантное отображение. Для любой матрицы $Z \in Mat_C(n)$ справедлива формула $V^2(\widehat{F_1(Z)}, \dots, \widehat{F_k(Z)}) = \mathfrak{M}_k(J_\Phi(Z))$.*

Доказательство. Равенство (1.4) не перестанет быть верным, если в его правой части матрицу $F_*(Z)$ заменить матрицей $F_*(Z^T)$, так как эти две матрицы отличаются только перестановкой строк. Отсюда, а также из равенства (4.1), получается утверждение теоремы.

Максимальный минор матрицы $J_\Phi(Z)$, образованный строками с индексами $j_1 l_1, \dots, j_k l_k$, будем обозначать через $J_\Phi(j_1 l_1, \dots, j_k l_k)(Z)$. Он равен якобиану $\partial(f_1, \dots, f_k)/\partial(z_{j_1 l_1}, \dots, z_{j_k l_k})$, вычисленному в точке Z. Рассмотрим частный случай отображения Φ, когда все функции f_ν зависят только от первых k сумм $\widetilde{s_1}(Z), \dots, \widetilde{s_k}(Z)$.

Лемма. *Пусть $k \le n$ и дана система функций $f_\nu(Z) = \varphi_\nu(\widetilde{s_1}(Z), \dots, \widetilde{s_k}(Z))$ при $\nu = 1, \dots, k$, где $\varphi_\nu(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_k})$ – голоморфная на пространстве C^k функция. Тогда имеет место равенство поливекторов*

$$\widehat{grad}\, f_1 \wedge \dots \wedge \widehat{grad}\, f_k = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_k})} \hat{E} \wedge \widehat{Z^T} \wedge \dots \wedge \widehat{(Z^T)^{k-1}}.$$

Доказательство. При $\nu = 1, \dots, k$ справедливы равенства $\widehat{grad}\, f_\nu = (\partial f_\nu/\partial \widetilde{s_1}) \widehat{grad}\, \widetilde{s_1} + \dots + (\partial f_\nu/\partial \widetilde{s_k}) \widehat{grad}\, \widetilde{s_k}$. Перемножая внешним образом левые и правые части этих равенств и используя формулу (3.2), получаем утверждение леммы.

В координатах доказанное утверждение выглядит так:

$$J_\Phi(j_1 l_1, \dots, j_k l_k)(Z) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_k})} \langle j_1 l_1, \dots, j_k l_k \rangle (Z^T). \quad (4.2)$$

Если в этом равенстве взять $k = n$, возвести модули обеих его частей в квадрат и выполнить суммирование по всем минорам матрицы $J_\Phi(Z)$, то получим соотношение $V(\widehat{F_1(Z)}, \dots, \widehat{F_n(Z)}) =$ $|\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)/\partial(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_n})| V(\hat{E}, \hat{Z}, \dots, \widehat{Z^{n-1}})$. Отсюда и из (2.1) следует неравенство $V^2(\widehat{F_1(Z)}, \dots, \widehat{F_n(Z)}) \ge |\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)/\partial(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_n})|^2 |Dis(Z)|$, которое превращается в равенство, если матрица Z нормальна. Наконец, займёмся преобразованием оценки (2.1).

Теорема 2. *Пусть $k \le n$ и дана система функций $f_\nu(Z) = (-1)^{\nu+1} i_\nu(Z) + \vartheta_\nu(i_1(Z), \dots, i_{\nu-1}(Z))$ при $\nu = 1, \dots, k$, где $\vartheta_\nu(i_1, \dots, i_{\nu-1})$ – голоморфная на пространстве $C^{\nu-1}$ функция. Тогда для любой матрицы $Z \in Mat_C(n)$ и любого набора индексов $j_1 l_1, \dots, j_k l_k$ справедливо равенство $J_\Phi(j_1 l_1, \dots, j_k l_k)(Z) = \langle j_1 l_1, \dots, j_k l_k \rangle (Z^T)$.*

Доказательство. Из формул Ньютона следует, что инварианты произвольной матрицы Z выражаются через её суммы Ньютона по формулам $(-1)^{\nu+1} i_\nu(Z) = s_\nu(Z)/\nu + \pi_\nu(s_1(Z), \dots, s_{\nu-1}(Z))$, где все π_ν – многочлены. Добавляя к каждой функции $(-1)^{\nu+1} i_\nu(Z)$ слагаемое $\vartheta_\nu(i_1(Z), \dots, i_{\nu-1}(Z))$, упоминаемое в теореме, для $\nu = 1, \dots, k$, получим $f_\nu(Z) = \widetilde{s_\nu}(Z) + \psi_\nu(\widetilde{s_1}(Z), \dots, \widetilde{s_{\nu-1}}(Z))$, где $\psi_\nu(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_{\nu-1}})$ – целая функция. В обозначениях леммы имеем $\varphi_\nu(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_k}) = \widetilde{s_\nu} + \psi_\nu(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_{\nu-1}})$, так что якобиан $\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)/\partial(\widetilde{s_1}, \dots, \widetilde{s_k}) = 1$, и утверждение теоремы следует теперь из равенства (4.2).

Следствие. *В предположениях теоремы для любой матрицы $Z \in Mat_C(n)$ справедливо неравенство*

$$|sDis_{n-k}(Z)| \le \mathfrak{M}_k(J_\Phi(Z)). \quad (4.3)$$

Неравенство обращается в равенство, если $k = n$ и матрица Z нормальна, а также если $k \le n$ и матрица Z эрмитова или косоэрмитова. При $k = n$ неравенство будет строгим, если матрица Z не является нормальной и не имеет кратных собственных значений.

Правая часть оценки (4.3) становится особенно простой, если положить в теореме 2 функции ϑ_ν тождественно равными нулю, а также пренебречь знаками, то есть взять $f_\nu(Z) = i_\nu(Z)$. Тогда миноры матрицы $J_\Phi(Z)$ – это якобианы $\partial(i_1, \dots, i_k)/\partial(z_{j_1 l_1}, \dots, z_{j_k l_k})$. С точностью до знаков они совпадают с многочленами $\langle j_1 l_1, \dots, j_k l_k \rangle (Z^T)$.

Приведём пример. Пусть $n = 3$. Тогда $i_1(Z) = z_{11} + z_{22} + z_{33}$, $i_2(Z) = z_{11}z_{22} + z_{11}z_{33} + z_{22}z_{33} - z_{12}z_{21} - z_{13}z_{31} - z_{23}z_{32}$, $i_3(Z) = z_{11}z_{22}z_{33} + z_{12}z_{23}z_{31} + z_{13}z_{32}z_{21} - z_{11}z_{23}z_{32} - z_{22}z_{13}z_{31} - z_{33}z_{12}z_{21}$.

Поэтому

$$\partial(i_1, i_2, i_3)/\partial(z_{11}, z_{22}, z_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & z_{22} + z_{33} & z_{22}z_{33} - z_{23}z_{32} \\ 1 & z_{11} + z_{33} & z_{11}z_{33} - z_{13}z_{31} \\ 0 & -z_{32} & z_{12}z_{31} - z_{11}z_{32} \end{vmatrix} =$$
$$z_{32}(z_{11} - z_{22})(z_{33} - z_{11}) + z_{12}z_{31}(z_{11} - z_{22}) + z_{23}z_{32}^2 - z_{13}z_{31}z_{32}.$$

В то же время

$$\langle 11,22,23 \rangle (Z^T) = \begin{vmatrix} 1 & z_{11} & z_{11}^2 + z_{12}z_{21} + z_{13}z_{31} \\ 1 & z_{22} & z_{22}^2 + z_{12}z_{21} + z_{23}z_{32} \\ 0 & z_{32} & z_{12}z_{31} + z_{32}z_{22} + z_{33}z_{32} \end{vmatrix} =$$
$$z_{32}(z_{22} - z_{11})(z_{33} - z_{11}) + z_{12}z_{31}(z_{22} - z_{11}) + z_{13}z_{31}z_{32} - z_{23}z_{32}^2$$

– отличие только в знаке.

Равенство (4.3) в случае, когда матрица Z вещественна и симметрична, было доказано в [10].

Литература:

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.-552 с.
2. Илюшечкин Н. В. Об одном экстремальном свойстве нормальных матриц, Математические заметки, 2015, Том 97, выпуск 1, с. 67 – 73.
3. Илюшечкин Н. В. Письмо в редакцию, Математические заметки. 2015, Том 98, выпуск 4, с. 640.
4. Borchardt C. W. Neue Eigenschaft der Gleichung, mitderen Hülfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt, Journal für die reine und angewandte Mathematic. 1846. V. 30. s. 38 – 45.
5. Newell M. J. On identities associated with a discriminant, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1972/1973. V. 2. № 18. p. 287 – 291.
6. Roy M.-F, Dagstuhl Seminar Proceedings, Subdiscriminants of symmetric matrices are sums of squares, Mathematics, algorithms, proofs. 2005,2006. **05021,** IBFI, Dagstuhl, Germany, [Электронный ресурс] – http://drops,dagstuhl,de/opus/volltexte/2006/347.
7. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.-222 с.
8. Илюшечкин Н. В. О вычислении целых функций от матриц по Леверье – Фаддееву, Евразийское научное объединение, 2019, Конференция 51, выпуск 5, с. 26 – 29.
9. Petersen K. B., Pedersen M. S. The Matrix Cookbook. Version: November **15.** 2012. [Электронный ресурс] – https://lingpipe-blog.com/2011/02/03/the-matrix-cookbook/
10. Илюшечкин Н. В. Субдискриминанты симметрической матрицы и якобианы её инвариантных отображений, Математический сборник. 2015, Том 206, выпуск 6, с. 3 – 14.