

# О сингулярных связанных состояниях в атоме водорода и холодном ядерном синтезе

В. К. Игнатович  
ЛНФ ОИЯИ, Дубна, РФ

15 июля 2018 г.

## Аннотация

Для холодного ядерного синтеза с участием водорода и дейтерия ядра этих элементов должны быть экранированы электроном. Достаточная экранировка возможна только с помощью сингулярных состояний. Обсуждается возможность таких состояний и связанные с ними проблемы.

Ключевые слова: квантовая механика, атом водорода, связанное состояние, сингулярная функция, холодный ядерный синтез.

## About singular bound states in the Hydrogen atom and cold nuclear synthesis

Ignantovich V.K.

### Abstract

For cold nuclear fusion involving hydrogen and deuterium, the nuclei of these elements must be electronically screened. Sufficient screening is possible only with the help of singular states. The possibility of such states and related problems are discussed here.

Keywords: quantum mechanics, hydrogen atom, bound state, singular function, cold nuclear fusion.

## 1 Введение

Процессы холодного ядерного синтеза происходят в природе. Без них трудно или почти невозможно объяснить почему недра земли так горячи, как зажигаются звезды и почему в первую очередь в них выгорает водород. Но прямой синтез ядер водорода с другими ядрами сильно затруднен из-за кулоновского барьера. Попытка преодоления этого барьера методом грубой силы, предпринимаемой в ТОКАМАКах не приводит к желаемым результатам. Должен быть найден способ, с помощью которого кулоновское поле ядер водорода экранируется. Очевидно, что этому могут помочь электроны, но в обычных состояниях электроны находятся слишком далеко от ядер, и вероятность экранировки  $\sim 10^{-12}$  слишком мала, чтобы в нормальных земных условиях наблюдать реакции синтеза. Однако, в атоме водорода возможны и другие, сингулярные, состояния электрона. Именно о них и пойдет речь в данной работе. В работах [1–3] была сделана попытка ввести сингулярные состояния в атомах внутри вещества, используя модификацию кулоновского потенциала вследствие взаимодействия с окружающими атомами. Однако сингулярные состояния

присущи и свободному атому водорода [4, 5]. Эти состояния имеют непрерывный спектр, и потому они не могут быть обнаружены спектральным анализом. С одной стороны они, как будет показано в следующем разделе при исследовании уравнения Шредингера, возникают совершенно естественно, с другой стороны, они являются неэрмитовыми, из-за чего современная наука исключает их. Ниже рассмотрены способы преодоления неэрмитовости. Один из них состоит в том, чтобы внутри ядра выделить область вблизи  $r = 0$ , где решение должно быть регулярно, и сшить его по логарифмической производной с внешним сингулярным решением. Однако такой способ приводит к дискретному спектру сингулярных состояний. Казалось бы для экранировки ядра не имеет значения непрерывен или дискретен спектр сингулярных волновых функций, но численные расчеты показывают, что полученный таким способом дискретный спектр оказывается очень близок к регулярному, а чем ближе сингулярное состояние к регулярному, тем меньше вероятность экранирования ядра, которая приближается к величине  $10^{-12}$ . характерной для регулярных состояний. В принципе, с помощью введения магнитного поля внутри атома можно создать сингулярные состояния с непрерывным спектром, но численные расчеты снова показывают, что экранировка в таких состояниях при реалистических магнитных полях невелика. В заключении обсуждается возможный эксперимент по осуществлению холодного синтеза и его проверке. В случае положительного результата сингулярные состояния придется признать, и с их неэрмитовостью придется смириться.

В следующем разделе показывается, как рассчитываются сингулярные волновые функции в кулоновском поле, и рассматривается модель ядра с потенциальной ямой. Численно исследуется возможность сшивания волновых функций внутри и вне ямы, исследуется возможность получения непрерывного спектра сингулярных состояний, которая снова ни к чему хорошему не приводит, и далее обсуждается схема эксперимента по холодному ядерному синтезу.

## 2 Уравнение Шредингера в кулоновском поле

Стационарное уравнение Шредингера для атома водорода [6]

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{e^2}{r} - E \right) \Psi(\mathbf{r}, E) = 0, \quad (1)$$

где  $E > 0$ , т.е.  $E$  — энергия связанного состояния, при  $L = 0$  приводится к уравнению для радиальной функции  $\psi(r, E)$ , а после подстановки  $\psi(r, E) = u(r, E)/r$  приводится к уравнению для  $u(r, E)$  вида:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} - E \right) u(r, E) = 0 \quad (2)$$

в безразмерных переменных:  $r$  — в единицах радиуса Бора  $a_B = \hbar^2/me^2 = 0,525 \text{ \AA}$  а энергия в единицах  $E_H = e^2/2a_B = 13.6 \text{ эВ}$  — энергии ионизации с основного уровня атома водорода. Уравнение 2-го порядка имеет два линейно независимых решения. Одно из них,  $u(r, E)$ , обращается в ноль при  $r = 0$ , а другое, обозначим его  $s(r, E)$ , равно постоянной  $c \neq 0$  при  $r = 0$ . Поскольку 2 решения удовлетворяют Вронскиану

$$s(r, E) \frac{du(r, E)}{dr} - u(r, E) \frac{ds(r, E)}{dr} = C \neq 0, \quad (3)$$

то, если одно решение экспоненциально расходится на бесконечности, то другое на бесконечности экспоненциально сходится. В точках дискретного спектра  $E = 1/n^2$  с целочисленными  $n$  только функция  $u(r, E)$  экспоненциально сходится, а между целочисленными  $n$ , на

всех отрезках  $n < \beta < n+1$  при  $E = 1/\beta^2$ , только функция  $s(r, E)$  экспоненциально сходится. Причем эта функция нормируема, и, значит, описывает связанное состояние. Обычно это состояние отбрасывается, поскольку сингулярное состояние  $\psi_s(r, E) = s(r, E)/r$  после подстановки в уравнение (1) дает в правой части не ноль а  $-4\pi\delta(\mathbf{r})$ , т.е. оно не удовлетворяет однородному уравнению Шредингера. Значит функция  $\psi_s(r, E)$  оказывается неэрмитовой, с ее помощью нельзя найти среднее значение  $\int \psi_s^*(r, E)H\psi_s(r, E)dr$  гамильтониана  $H$ . Ниже будут рассмотрены способы преодоления этого недостатка.

## 2.1 Метод потенциальной ямы

На самом деле все пространство внутри ядра атома можно разделить на 2 части. Одна — внутренность ядра  $r < a$ , которую можно представить, например, потенциальной ямой глубины  $U$  с границей  $r = a$ , а другая,  $r > a$ , — все остальное пространство. Внутри ямы приемлемо только одно решение  $u(r, E) = A \sin(Kr)$ , с  $K = \sqrt{U - E}$ , которое обращается в ноль при  $r = 0$ . Это решение, однако, имеет конечную логарифмическую производную  $L_0(a) = u'(a, E)/u(a, E) = K \operatorname{ctg}(Ka)$  на границе  $r = a$ . Во внешней области имеются 2 решения. Оба должны иметь такую же логарифмическую производную при  $r = a$ , но только одно из них сходится на бесконечности. Отсюда следует правомерность рассмотрения сингулярных связанных состояний. Правда, при заданных параметрах внутренней потенциальной ямы, удовлетворить равенству внутренней и внешней логарифмических производных можно только при дискретных значениях энергии, и положения этих дискретных сингулярных уровней можно будет предсказать, когда будут известны параметры  $U$  и  $a$ . Чтобы оценить такую возможность, посмотрим, как вычисляются сингулярные функции, и чему могут быть равны их логарифмические производные при  $r = a$ .

## 3 Сингулярные состояния в кулоновском поле

Покажем, как вычисляются сингулярные функции  $s(r, E)$  в атоме водорода. Перейдем к решению уравнения (2) при  $E = 1/\beta^2$ . Обычно оно решается следующим образом. С помощью преобразования  $r = 2\beta\rho$  и подстановки

$$u(\rho) = \rho \exp(-\rho/2)w(\rho)$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\left( \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2 - \rho) \frac{d}{d\rho} - (1 - \beta) \right) w(\rho) = 0, \quad (4)$$

которое решается с помощью степенных гипергеометрических рядов [7]. Удобнее, однако, представить уравнение (2) в виде

$$\left( r \left[ \frac{d^2}{dr^2} - E \right] + 2 \right) u(r) = 0. \quad (5)$$

и искать решение в виде интеграла Лапласа [8]:

$$u(r) = \oint_C dt e^{rt} Z(t), \quad (6)$$

где  $C$  — некоторый контур, замкнутый или уходящий на бесконечность. Подстановка в (2) приводит к уравнению для  $Z(t)$

$$\oint_C dt [r(t^2 - E) + 2] e^{rt} Z(t) \equiv e^{rt}(t^2 - E)Z(t)|_C + \oint_C e^{rt} dt \left[ -\frac{d}{dt}(t^2 - E) + 2 \right] Z(t) = 0. \quad (7)$$

Будем рассматривать только такие контура, в которых первое слагаемое в правой части обращается в ноль. Тогда (7) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt}(t^2 - E)Z(t) = 2Z(t), \quad (8)$$

решение которого равно

$$\ln[(t^2 - E)Z(t)] = 2 \int \frac{dt}{(t^2 - E)} + c, \quad (9)$$

или представляется в виде

$$Z(t) = \frac{c}{(t^2 - E)} \left( \frac{t - k}{t + k} \right)^{1/k} = c \frac{(t - k)^{1/k-1}}{(t + k)^{1/k+1}}, \quad (10)$$

где  $k = \sqrt{E}$ , а постоянная  $c$  определяется нормировкой, и в данный момент ее можно положить равной единице:  $c = 1$ . Подстановка в (6) дает

$$u(r) = \oint dt e^{rt} \frac{(t - k)^{1/k-1}}{(t + k)^{1/k+1}} = \frac{1}{k} \oint dt e^{krt} \frac{(t - 1)^{1/k-1}}{(t + 1)^{1/k+1}}. \quad (11)$$

Приняв во внимание, что  $E = 1/\beta^2$ , перепишем (11), с точностью до общего множителя, в виде

$$u(r) = \oint dt e^{rt/\beta} \frac{(t - 1)^{\beta-1}}{(t + 1)^{\beta+1}}. \quad (12)$$

Если  $\beta = n$  — целое число, то подынтегральное выражение содержит только полюс, интеграл вокруг которого приводит к известным функциям атома водорода. Например, при  $n = 1$  получаем

$$u(r) = re^{-r}. \quad (13)$$

Эта функция регулярна в нуле и экспоненциально убывает на бесконечности.

Линейно независимое второе решение находится с помощью вронскиана

$$\frac{d}{dr}[u'_s u_0 - u'_0 u_s] = 0 \rightarrow u'_s u_0 - u'_0 u_s = c. \quad (14)$$

Решение этого уравнения приводит к экспоненциально растущей функции и рассматривалось в [1, 2].

В общем случае, однако, спектр водородоподобного атома из-за ридберговских поправок  $\delta$  (см, например, Ландау [6] Гл.10, Eq.(68.2)) пропорционален не  $1/n^2$ , а  $1/(n-\delta)^2$ , т.е. параметр  $\beta$  — не целое число. Ридберговские поправки появляются, например, в двухэлектронных атомах, где расчет спектра одного электрона требует учета экранировки ядра другим электроном. Ландау, для получения такого спектра предлагает изменить граничное условие при  $r = 0$ , но не замечает, что это эквивалентно введению сингулярных функций. Экранировка приводит к отклонению электрического поля от кулоновского. Но даже в одноэлектронном атоме, водорода или дейтерия, существует отклонение электрического поля от кулоновского внутри ядра. В самом деле, в кварковой модели протон состоит из двух up кварков с зарядом  $+2|e|/3$  заряда электрона  $e$ , и одного down кварка с зарядом  $-|e|/3$ . Этот d кварк играет такую же роль в ядре, как дополнительный электрон, скажем, в атоме гелия. Он экранирует положительный заряд up кварков и может привести к Ридберго-подобной поправке в атомном спектре.

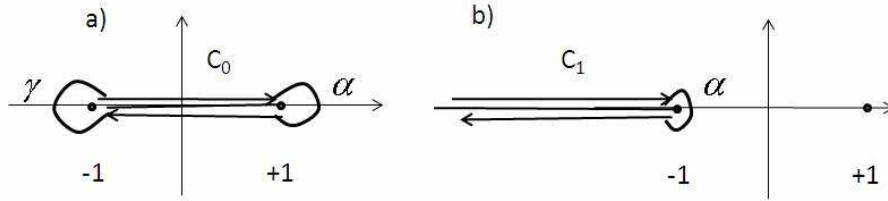


Рис. 1: Два пути интегрирования в комплексной плоскости интеграла (12), которые дают два независимых решения уравнения (5), а также обращают в ноль первое слагаемое в правой части уравнения (7).

Если  $\beta$  не целое число, то функция под интегралом в (12) имеет две точки ветвления при  $t = \pm 1$ , а два независимых решения уравнения (5) определяются с помощью выбора двух различных путей интегрирования вокруг точек ветвления [9]. Например, два независимых решения могут быть найдены с контурами, показанными на рис.1.

Интеграл по контуру  $C_0$ , как показано в [4, 5], приводит к функции  $u_0(r)$ , растущей на бесконечности и линейно убывающей при малых  $r$ . Соответственно линейно независимое решение  $u_1(r)$  должно иметь конечную величину в нуле и экспоненциально сходиться на бесконечности. Иначе Вронскиан не может быть постоянным во всем диапазоне изменения  $r$ . Найдем эту функцию.

### 3.1 Интеграл по контуру $C_1$

Линейно независимое решение находится путем интегрирования по контуру  $C_1$ , показанному на Рис.1b). Интеграл по этому контуру, однако, может быть преобразован к более удобному виду. Действительно, рассмотрим интеграл по замкнутому контуру, показанному на Рис.2. Внутри контура нет никаких особых точек, поэтому интеграл равен нулю. На бесконечно удаленных дугах окружности интеграл равен нулю при любых  $r$ . Поэтому интеграл по контуру  $C_1$  равен сумме интегралов по двум лучам А и В. Таким образом, функция  $u_1(r)$  может быть представлена интегралом:

$$u_1(r) = \oint_{C_1} dt e^{rt/\beta} \frac{(t-1)^{\beta-1}}{(t+1)^{\beta+1}} = \int_0^\infty ds \operatorname{Im} \left[ e^{-rse^{-i\phi}/\beta} \frac{(-se^{-i\phi} - 1)^{\beta-1}}{(-se^{-i\phi} + 1)^{\beta+1}} e^{-i\phi} \right] ds, \quad (15)$$

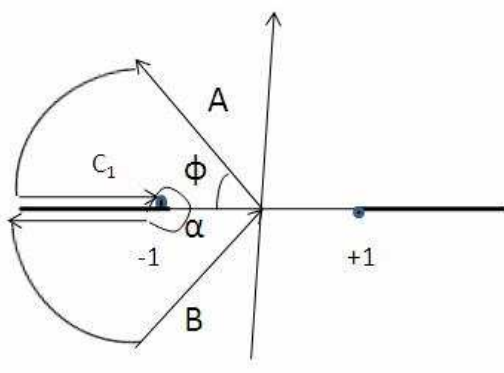


Рис. 2: Интеграл (12) по замкнутому контуру, включающему  $C_1$ , два луча А и В и две бесконечно удаленные дуги окружности, равен нулю, поскольку у подинтегральной функции внутри контура нет никаких особых точек. Интеграл по дугам окружности равен нулю. Поэтому интеграл по контуру  $C_1$  равен сумме интегралов по двум лучам А и В.

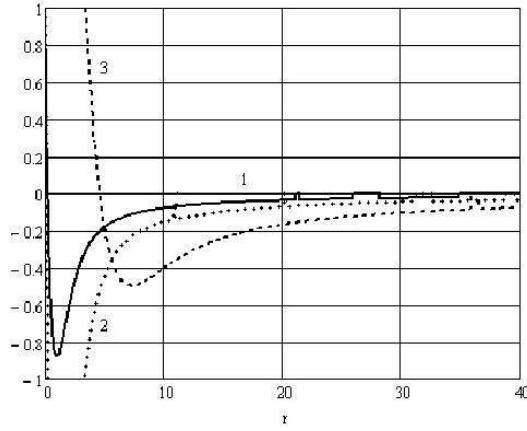


Рис. 3: Функция  $u_1(r)$ , вычисленная с помощью выражения (15) для  $\beta$  равных 1 — 0.6; 2 — 0.8; 3 — 1.2. Все функции нормированы в нуле на единицу.

где была произведена замена переменной  $t = -se^{-i\phi}$ .

При  $r \rightarrow 0$ , экспоненту под интегралом можно приравнять единице, и интеграл без нее сходится, т.е. при  $r \rightarrow 0$  функция  $u_1(r)$  имеет конечное значение. С другой стороны, при  $r \rightarrow \infty$  основной вклад в интеграл дает точка  $se^{-i\phi} = 1$ , поэтому на бесконечности функция  $u_1(r)$  экспоненциально убывает. В качестве демонстрации на Рис.3 приведены результаты численного интегрирования (15) при различных  $\beta$ . Результат интегрирования, естественно, не зависит от угла  $\phi$  (см. Рис. 2).

Для численных расчетов удобно сделать преобразование

$$\int_0^\infty ds f(s) = \int_0^1 ds [f(s) + f(1/s)/s^2].$$

В результате (15) приведет к виду

$$u_1(r) = \int_0^1 ds \operatorname{Im} \left[ e^{-rse^{-i\phi}/\beta} \frac{(-se^{-i\phi} - 1)^{\beta-1}}{(-se^{-i\phi} + 1)^{\beta+1}} e^{-i\phi} + e^{-re^{-i\phi}/s\beta} \frac{(-e^{-i\phi} - s)^{\beta-1}}{(-e^{-i\phi} + s)^{\beta+1}} e^{-i\phi} \right] ds, \quad (16)$$

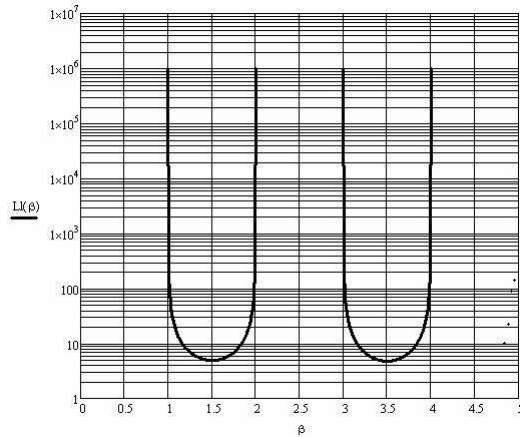


Рис. 4: Логарифмическая производная  $L(\beta)$  функции (16) на границе ядра  $r = a$  в зависимости от  $\beta$ .

Результаты расчета логарифмической производной Рис.4 показывают, что она резко возрастает при приближении  $\beta$  к целочисленным значениям. Посмотрим, как мож-

но считать эту производную с производной  $L_0 = K \operatorname{ctg}(Ka)$  регулярной функции внутри потенциальной ямы. Пусть глубина потенциальной ямы равна 10 Мэв. В безразмерных единицах это соответствует  $U \approx 10^6$ . Поэтому при  $a = 10^{-6}$  имеем  $Ka \ll 1$  и  $K \operatorname{ctg}(Ka) \approx 1/a = 10^6$ . Чтобы увидеть при каком значении  $\beta$  логарифмическая производная сшивается с  $L_0 = K \operatorname{ctg}(Ka)$ , построим функцию

$$ff(\beta) = L(\beta) - L_0(\beta). \quad (17)$$

Вблизи  $\beta = 2$  эта функция показана на Рис.5. Видно, что она обращается в ноль при  $\beta \approx 1.999994$ . Это значит, что энергия сингулярного состояния очень близка к энергии

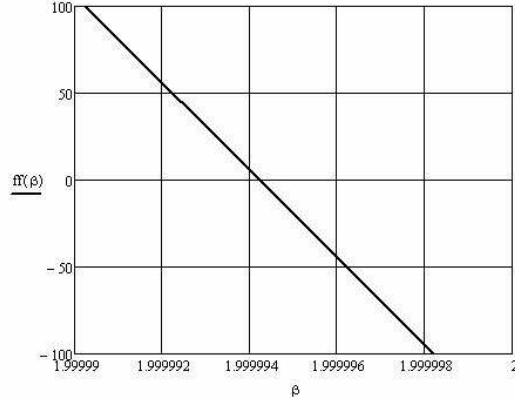


Рис. 5: Разность между логарифмическими производными (17) снаружи и внутри ямы на границе  $r = a$  в зависимости от  $\beta$ .

регулярного. При этом оказывается, что чем ближе сингулярное состояние к регулярному, тем меньше вероятность экранирования ядра электроном в сингулярном состоянии.

Однако, с некоторым ухищрением, можно построить и связанные сингулярные состояния с непрерывным спектром.

### 3.2 Метод построения сингулярных состояний в непрерывном спектре

Представим себе, что во внешней области  $r > a$  имеется некое магнитное поле  $B$ , и уравнение (2) может быть переписано в виде

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + B\sigma_z - E \right) s(r, E) = 0, \quad (18)$$

где иллюстрации ради магнитное поле принято постоянным. Решение уравнения представляется в виде

$$s(r, E) = \begin{pmatrix} s_1(r, E) \\ Cs_2(r, E) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $s_{1,2}(r, E)$  удовлетворяют уравнениям

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} - (E \mp B) \right) s_{1,2}(r, E) = 0, \quad (20)$$

и при  $r = 0$  равны единице.

Допустим, что во внутренней области  $r < a$  поля нет, и решение можно искать в виде скалярной функции  $u(r, E) = A \sin(Kr)$ . Сошьем скалярную функцию со спинорной, потребовав равенство общей логарифмической производной на границе  $r = a$ :

$$K \operatorname{ctg}(Ka) = \frac{s'_1 + Cs'_2}{s_1 + Cs_2} \Big|_{r=a}, \quad (21)$$

которое выполняется при

$$C = -\frac{s'_1 - K \operatorname{ctg}(Ka)s_1}{s'_2 - K \operatorname{ctg}(Ka)s_2} \Big|_{r=a} \equiv -\frac{L(\beta, -B) - L_0(\beta)}{L(\beta, +B) - L_0(\beta)}. \quad (22)$$

Таким образом, подбором  $C$  можно построить сингулярное состояние при любом значении  $\beta$ . Однако, при реалистичных малых  $B$  вдали от  $\beta = n$  получаем  $C = 1$ , и численный расчет экранировки приводит к малому значению. Вблизи же  $\beta = n$  получаются состояния снова с малой вероятностью экранировки.

Результат численных расчетов с исключенной областью  $r < a$  показывает, что получаемые сингулярные состояния не могут обеспечить высокую вероятность экранировки. Эта вероятность может стать большой только если пренебречь неэрмитовостью сингулярных состояний.

## 4 Экранировка ядра и холодный ядерный синтез

Сингулярные состояния могли бы иметь большое значение для объяснения реакций холодного синтеза [10–12]. Можно представить себе, что медленные электроны в твердом теле рассеиваются на атомах водорода и попадают на сингулярное связанное состояние, выбивая законный электрон. В сингулярном состоянии заряд протона или дейтрона ядра оказывается экранированным, и получившаяся нейтральная частица может вступить с соседним ядром в ядерную реакцию. Вероятность экранирования можно рассчитать следующим образом. Вычислим норму функции  $s(r, \beta)$ :

$$N^2 = \int_0^\infty |s(r, \beta)|^2, \quad (23)$$

тогда вероятность  $Q$  экранирования ядра можно определить как

$$Q = \frac{1}{N^2} \int_0^R |s(r, \beta)|^2, \quad (24)$$

где  $R \approx 10^{-4}$  – радиус ядра. При  $\beta = 0.6, 0.8, 1.2$  эта вероятность, как показано в [4] имеет величину порядка  $Q \approx 10^{-6}$ .

При обычных условиях вероятность ядерной реакции холодного синтеза очень мала. При высокой температуре и высоком давлении подвижность нейтральных частиц (экранированных ядер) возрастает и расстояние между ядрами уменьшается. Вследствие этого вероятность ядерных реакций холодного синтеза возрастает.

В лабораторных условиях можно представить себе эксперимент с дейтерированным образцом титана, нагретым до температуры порядка 1000 градусов Цельсия. При возникновении ядерных реакций будут образовываться изотопы ванадия, большая часть которых нестабильна. Таким образом можно будет заметить и дополнительное выделение тепла, которое может достигнуть мощности порядка [4] 100 Вт/см<sup>2</sup>, и образование новых химических элементов и изотопов.



## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Мичиганского Университета П.Д.Миллеру за его высоко профессиональные консультации по математике, используемой в данной работе, а также сотрудникам ЛТФ ОИЯИ Д.Казакову и В.Мележику за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] V.K.Ignatovich. "On cold nuclear synthesis" Proc. of XXIII International Seminar on Interaction of Neutrons with Nuclei, JINR, Dubna May 25-29, 2015.
- [2] V.K.Ignatovich. "A Singular Solution for a Hydrogen Atom as a Way Toward Cold Nuclear Fusion." Open Science Journal of Modern Physics. 2015 Vol. 2, No. 5, pp.83-88.
- [3] V.K.Ignatovich. "A Missed Solution for an Atom: A Gate Toward Cold Nuclear Fusion" Infinite Energy Magazine n. 117, pp. 33-36 (2014).
- [4] V.K.Ignatovich. " Singular Bound States and Cold Nuclear Fusion" Physics Journal (AIS) 2 n.1 pp. 6-10 (2016).
- [5] V.K.Ignatovich. "Сингулярные связанные состояния атома водорода" 33я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения (ноябрь 2017) Научные исследования и разработки, ISSN:2411-1899, Изд:Евразийское Научное Объединение № 33, сс. 3-8 (2017)
- [6] Landau LD, Lifshits EM. "Quantum mechanics. Nonrelativistic theory." М.: Nauka, 1989.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1970). The (free) online version of this book is at <http://dlmf.nist.gov>.
- [8] E.T.Whittaker and G.N.Watson. "A course of modern analysis" Cambridge University press, 1927. Fourth edition. Chapter 10.
- [9] Peter D. Miller, "Applied Asymptotic Analysis" Graduate Studies in Mathematics, vol. 75 AMS 2006.
- [10] Hora, H., et al. "Low Energy Nuclear Reactions resulting as picometer interactions with similarity to K-shell electron capture." in Eleventh International Conference on Condensed Matter Nuclear Science. 2004. Marseille, France.
- [11] A.G. Parkhomov, "Investigation of the heat generator similar to Rossi reactor", Report on Experiments. International Journal of Unconventional Science, issue 7(3), pp. 68-72, 2015. <http://www.unconv-science.org/en/n7/parkhomov/>.
- [12] Giuseppe Levi, Evelyn Foschi, Bo Höistad, et al. "Observation of abundant heat production from a reactor device and of isotopic changes in the fuel." <http://www.sifferkoll.se/sifferkoll/wp-content/uploads/2014/10/LuganoReportSubmit.pdf>