www.esa-conference.ru

УДК 517.94

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными параметрами

Гурьянов Анатолий Евсеевич, канд. физ.-мат. н., доцент, старший преподаватель
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. *Даётся доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными параметрами.*
Ключевые слова: *задача Коши, абсолютно-непрерывный случайный процесс.*

Annotation: *A proof of theorem of Cauchy problem existence unique solution for system of ordinary differential equations with random parameters is given.*
Keywords: *Cauchy problem, Absolutely-continuous stochastic process.*

Теорема [1, с. 26]. Если в системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = G(x,t,\xi(t)) \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ (2)

$t \in R^1$, $t_0 \in R^1$, $t \geq t_0$, m, n суть натуральные, $x \in R^n$, состоящий из случайых величин начальный вектор $x_0 \in R^n$, измеримый случайный процесс $\xi(t) \in R^m$, $z \in R^m$, $G(x,t,z)$ – измеримая по Борелю относительно (x,t,z) функция, и если существует интегрируемый на любом конечном промежутке $[t_0,t_1]$ неотрицательный случайный процесс $B(t)$ такой, что для всех x_1, $x_2 \in R^n$

$$|G(x_2,t,\xi(t)) - G(x_1,t,\xi(t))| \leq B(t)|x_2-x_1|, \tag{3}$$

а процесс $G(0,t,\xi(t))$ - абсолютно интегрируем на любом конечном промежутке $[t_0,t_1]$, то есть для любого $t_1 \geq t_0$

$$P\,\{\int_{t_0}^{t_1} |G(0,t,\xi(t))|\,dt < \infty|\} = 1, \tag{4}$$

то тогда существует единственное решение $x(t) \in R^n$ задачи Коши (1), (2), представляющее собой с вероятностью 1 абсолютно-непрерывный случайный процесс при $t \geq t_0$, для которого при $t \geq t_0$ справедлива оценка

$$|x(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |G(x_0,s,\xi(s))|ds\, e^{\int_{t_0}^{t} B(s)\,ds}. \tag{5}$$

Доказательство. Целесообразно сначала доказать эту теорему в упрощённом варианте, заменив условие измеримости используемых функций на условие их непрерывности. Введём в рассмотрение следующую вспомогательную систему интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} G(x(s),s,\xi(s))ds, \tag{6}$$

эквивалентную (равносильную) исходной задаче Коши (1), (2) в том смысле, что каждое непрерывное решение задачи Коши (1), (2) является решением системы интегральных уравнений (6) и наоборот каждое непрерывное решение системы интегральных уравнений (6) является решением задачи Коши (1), (2), благодаря условиям (3), (4).

Далее фиксируя произвольное вещественное число $t_1 > t_0$, определим рекурсивно на промежутке $[t_0,t_1]$ следующую последовательность непрерывно дифференцируемых случайных процессов

$$x^{(0)}(t) = x_0,\ x^{(k+1)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} G\left(x^{(k)}(s),s,\xi(s)\right) ds,\ k=0, 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Для них согласно неравенству (3) с вероятностью 1 выполняются следующие неравенства

$$|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |G\left(x^{(k+1)}(s),s,\xi(s)\right) - G\left(x^{(k)}(s),s,\xi(s)\right)|ds \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} B(s)\,|G\left(x^{(k)}(s),s,\xi(s)\right) - G\left(x^{(k-1)}(s),s,\xi(s)\right)|ds \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} |G(x_0,s,\xi(s))|ds\,(\int_{t_0}^{t} B(s)\,ds)^k/k! \leq$$

$$\int_{t_0}^{t_1} |G(x_0,s,\xi(s))|ds\,(\int_{t_0}^{t_1} B(s)\,ds)^k/k!,\ k=0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

С вероятностью 1 выполняются следующие неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1}|G(x_0,s,\xi(s))|ds \le \int_{t_0}^{t_1}|(G(x_0,s,\xi(s)) - G(0,t,\xi(t)))|ds + \int_{t_0}^{t_1}|G(0,t,\xi(t))|dt \le$$

$$\int_{t_0}^{t_1} B(s)\,ds\ |x_0| + \int_{t_0}^{t_1}|G(0,t,\xi(t))|dt \quad < \infty$$

Применяя следующее равенство

$$x^{(k+1)}(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{k}(x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)), \tag{9}$$

выводим, что на промежутке $[t_0,t_1]$ с вероятностью 1 существует предел последовательности непрерывных случайных процессов (7)

$$x(t, t_0, x_0) = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)}(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{\infty}(x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)) \tag{10}$$

в виде равномерно абсолютно сходящегося на промежутке $[t_0,t_1]$ с вероятностью 1 согласно неравенствам (8) ряда (10), являющегося непрерывным случайным процессом на промежутке $[t_0,t_1]$.

Из равенства (10) и неравенств (8) следует, что на промежутке $[t_0,t_1]$ с вероятностью 1 выполняются следующие неравенства и равенство

$$|x(t, t_0, x_0) - x_0| \le \sum_{j=0}^{\infty} |x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\int_{t_0}^{t}|G(x_0,s,\xi(s))|ds\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\,ds\right)^j}{j!} =$$

$$\int_{t_0}^{t}|G(x_0,s,\xi(s))|ds\, e^{\int_{t_0}^{t}B(s)\,ds} \tag{11}$$

Оцениваем на промежутке $[t_0,t_1]$ с вероятностью 1

$$|x(t, t_0, x_0) - x_0 - \int_{t_0}^{t} G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s))ds\,| \le$$

$$\left|x(t,t_0,x_0) - x^{(k+1)}(t) + x^{(k+1)}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s))ds\right| \le$$

$$|x(t,t_0,x_0) - x^{(k+1)}(t)| + |\,x^{(k+1)}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s))ds\,| \le$$

$$|x(t,t_0,x_0) - x^{(k+1)}(t)| + \left|\int_{t_0}^{t} G\left(x^{(k)}(s),s,\xi(s)\right)ds - \int_{t_0}^{t} G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s))ds\right|$$

$$\le |x(t,t_0,x_0) - x^{(k+1)}(t)| + \int_{t_0}^{t} B(s)\,ds \int_{t_0}^{t}|G(x_0,s,\xi(s))|ds \sum_{j=k}^{\infty}\frac{\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\,ds\right)^j}{j!}. \tag{12}$$

Отсюда, переходя к пределу по $k\to\infty$, выводим, что на промежутке $[t_0,t_1]$ с вероятностью 1

$$|x(t, t_0, x_0) - x_0 - \int_{t_0}^{t} G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s))ds\,| \le 0\,. \tag{13}$$

То есть $x(t, t_0, x_0)$ является решением системы интегральных уравнений (6) с непрерывно дифференцируемыми реализациями на промежутке $[t_0,t_1]$ в упрощённом варианте теоремы.

Без условия упрощения, то есть в полном варианте переходим от применения интегралов Римана к применению интегралов Лебега и получаем, что $x(t, t_0, x_0)$ является решением системы интегральных уравнений (6) с абсолютно непрерывными реализациями на промежутке $[t_0,t_1]$, удовлетворяющими с вероятностью 1 на промежутке $[t_0,t_1]$ системе уравнений (1), (2) при почти всех $t \in (t_0,t_1)$.

Пусть $y(t, t_0, x_0)$ является другим решением системы интегральных уравнений (6) с абсолютно непрерывными реализациями на промежутке $[t_0,t_1]$. Применяем стохастическую лемму Гроноулла [2, с. 19]

$g(s) = B(s), s \in [t_0, t_1]$,

$h(t) = |x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, x_0)| \le$

$$\int_{t_0}^{t}|G(x(s,t_0,x_0),s,\xi(s)) - G(y(s,t_0,x_0),s,\xi(s))|ds \le \int_{t_0}^{t} B(s)\,|(x(s,t_0,x_0)) - (y(s,t_0,x_0))|ds \le$$

$\int_{t0}^{t} g(s)h(s)ds$, при $t \in [t_0, t_1]$.

Отсюда согласно стохастической лемме Гроноулла

$h(t) \le 0\, e^{\int_{t0}^{t} g(s)\,ds}$ при $t \in [t_0,t_1]$,

то есть

$$x(t) = \mathbf{x}(t, t_0, x_0) = y(t, t_0, x_0) \text{ при } t \in [t_0,t_1]. \quad (14)$$

Существование единственного решения задачи Коши (1), (2) с абсолютно непрерывными реализациями на промежутке $[t_0,t_1]$ доказано.

Установленное выше существование с вероятностью 1 абсолютно непрерывного решения $x(t) = \mathbf{x}(t, t_0, x_0)$ задачи Коши (1), (2) как случайного процесса с абсолютно непрерывными реализациями на промежутке $[t_0, t_1]$ для любого фиксированного вещественного числа $t_1>t_0$ и означает существование единственного стохастического решения $x(t) = \mathbf{x}(t, t_0, x_0)$ задачи Коши (1), (2) при $t \geq t_0$.

Неравенство (5) следует из установленного выше неравенства (11) и равенства(14). Теорема доказана полностью.

Литература:

1.Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Главная редакция физико-математической литературы,1969. - 368 с.

2.Гурьянов А.Е. Стохастическая лемма Гроноулла. Стратегии устойчивого развития мировой науки. Международная научная конференция. Москва. Сборник научных трудов Евразийского Научного Объединения, №5(51), май, 2019 . С. 19.