УДК 517.94

Стохастическая лемма Гронуолла

Гурьянов Анатолий Евсеевич, канд. физ.-мат. н., доцент, старший преподаватель
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. *Лемма Гронуолла обобщается на случайные процессы.*
Ключевые слова: *неотрицательная случайная величина, неотрицательный непрерывный случайный процесс.*

Annotation. *Gronwall T.H. lemma is extended (generalized) in the sense of stochastic processes.*
Keywords: *nonnegative random variable, nonnegative continuous stochastic process.*

Лемма Гронуолла. Если для неотрицательной случайной величины μ и неотрицательных непрерывных случайных процессов g(t) и h(t) с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$h(t)\le \mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,, \tag{1}$$

то тогда с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$h(t)\le \mu\, e^{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,, \tag{2}$$

где t_0, t суть вещественные числа.

Доказательство. Введём в рассмотрение вспомогательную положительную случайную величину Ɛ. Из неравенства (1) следует, что

с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$h(t)\le \varepsilon+\mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,.$$

Отсюда следует, что

$$g(t)h(t)/(\varepsilon+\mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds)\le g(t) \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,. \tag{3}$$

Интегрируя по t левую и правую части неравенства (3) на промежутке

$[t_0, t]$ получаем выполнение с вероятностью 1 неравенства

$$\ln(\varepsilon+\mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds) - \ln(\varepsilon+\mu) \le \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует, что с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$\varepsilon+\mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds \le (\varepsilon+\mu)\, e^{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} \quad \text{при} \quad t\ge t_0 \tag{5}$$

Устремляя Ɛ к нулю в неравенстве (5), выводим, что с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$\mu+\int_{t_0}^{t} g(s)\,h(s)\,ds \le \mu\, e^{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,. \tag{6}$$

Левая часть неравенства (6) является правой частью истинного неравенства (1). Следовательно, с вероятностью 1 выполняется требуемое в формулировке леммы неравенство

$$h(t)\le \mu\, e^{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} \quad \text{при} \quad t\ge t_0\,.$$

Лемма доказана.

Заметим в заключение, что установленную выше лемму Гронуолла удобно применять при доказательстве теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров [1, с.26].

Литература:

1. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1969. - 368 с.