ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ EURASIAN SCIENTIFIC ASSOCIATION
www.esa-conference.ru

УДК 517.94

Абсолютно непрерывное решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения со случайными параметрами

Гурьянов Анатолий Евсеевич, канд. физ.-мат. н., доцент, старший преподаватель
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. *Даются два примера решения задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения со случайными параметрами.*
Ключевые слова: *задача Коши, абсолютно непрерывный случайный процесс.*

Annotation. *Two examples of Cauchy problem solution for nonlinear ordinary differential equation with random parameters are given.*
Keywords: *Cauchy problem, Absolutely continuous stochastic process.*

Рассмотрим следующую начальную задачу Коши для уравнения Риккати

$$dx/dt=a(1+x^2), \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

где t_0, t суть вещественные числа, a, x_0 суть непрерывные случайные величины, плотности которых положительны.

Реализации решения задачи Коши (1), (2) имеют следующий вид

$x(t)=\tan(\tan^{-1}(x_0)+a(t-t_0))$,

$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}(x_0)<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}(x_0)+a(t-t_0)<\frac{\pi}{2}$.

Отсюда следует, что на любом промежутке $[t_0, t_1]$ при $t_1>t_0$ не существует абсолютно непрерывного случайного процесса, являющегося

решением задачи Коши (1), (2).

Вероятностная мера этих абсолютно непрерывных реализаций решения задачи Коши (1), (2) на любом промежутке $[t_0, t_1]$ при $t_1>t_0$ равна вероятности

выполнения двух следующих неравенств

$$(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(x_0))/(t_0-t_1)<a<(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(x_0))/(t_1-t_0) \tag{3}$$

Вероятность выполнения двух неравенств (3) монотонно убывает до нуля при $t_1\to\infty$. Заметим, что здесь $\tan^{-1}$обозначает арктангенс.

Рассмотрим следующую начальную задачу Коши для не разрешенного относительно производной нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения со случайными параметрами

[1, с. 106, упр. 600].

$$x=t\,(dx/dt)+\sqrt{b^2+a^2(dx/dt)^2}\ , \tag{4}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{5}$$

где t_0, t суть вещественные числа, a, b, x_0 суть непрерывные случайные величины, плотности которых положительны.

Все реализации решений уравнения (4) имеют следующий вид

$$x(t) = |b| \text{ при } 0 < |t| < \infty, \tag{6}$$

$$x(t) = |b| \cos(\sin^{-1}(t/|a|)) \text{ при } 0 < |t| \le |a| \;. \tag{7}$$

Задача Коши (4), (5) при $t_0 = 0$, $x_0 = |b|$ **не имеет единственного решения.**

Реализации (6), (7) гладко слипаются при $t = 0$. Реализации (7) также как в предыдущем примере не образуют абсолютно непрерывного случайного процесса на любом не содержащем нуля промежутке $[t_0, t_1]$ при $t_1 > t_0$.

Если в формуле (5) $x_0 = |b|$ и $t_0 < 0$, то тогда задача Коши (4), (5) имеет **на промежутке** $[t_0, 0)$ единственное абсолютно непрерывное решение $x(t) = |b|$. А если в формуле (5) $x_0 = |b|$ и $t_0 > 0$, то тогда задача Коши (4), (5) имеет **на промежутке** $[t_0, \infty)$ **единственное** абсолютно непрерывное решение $x(t) = |b|$. Заметим, что в формуле (7) $\sin^{-1}$ обозначает арксинус.

Литература:

1.Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Мн.: Выш. шк., 1987. - 319 с.