

Новый физический Принцип Обобщенных Лучей и явный метод решения прямых и обратных задач для уравнений математической физики

Гребенников Александр Иванович, профессор
Заслуженный Независимый Университет (г. Пуэбла, Мексика)

Автором предложен новый подход для решения прямых и обратных задач для уравнений математической физики, т.е. уравнений в частных производных (УЧП), на основе нового физического Принципа Обобщенных Лучей (ПОЛ). Прямые задачи (ПЗ) представляют краевые задачи, состоящая в определении решения уравнения с известными в уравнении коэффициентами, правой частью, граничными и начальными условиями. Обратные задачи (ОЗ) состоят в определении неизвестных коэффициентов или правой части уравнения с помощью некоторых более полных граничных и начальных условий.

Существует два основных подхода для решения ПЗ для дифференциальных уравнений в явной аналитической форме: разложение Фурье и метод функции Грина [1]. Разложение Фурье используется, как правило, только в теоретических исследованиях. Метод функции Грина является явным, но трудно построить функции Грина для сложной геометрии рассматриваемой области, а также для уравнения с переменными коэффициентами. Известные численные методы и алгоритмы основаны на конечных разностях, конечных элементах и граничных интегральных уравнений. Эти численные подходы приводят к решению систем линейных алгебраических уравнений [2], которые требуют много памяти компьютера и времени вычислений. Известные математические методы для решения обратных задач являются нелинейными [3] - [6] и также требуют много времени и памяти в компьютерной реализации.

Современные исследования в различных прикладных областях, основанный на решение упомянутых ПЗ и ОЗ, характеризуются необходимостью более существенного проникновения в структуру исследуемых объектов и явлений, а также рассмотрением областей сложной геометрической структуры. Это требует разработки новых аналитических и численных методов исследования, адаптированных к современным требованиям. Одним из наиболее важных из этих требований является возможность получить достаточное увеличение точности на решения проблем в режиме реального времени, или, что эквивалентно, решить проблему с соответствующей точностью быстрым образом. Математические модели и известных численные методы часто не удовлетворяют этим требованиям при их компьютерной реализации. Таким образом развитие новых методов и быстрых алгоритмов для решения упомянутых

проблем очень актуально.

В ряде работ автора [7] - [12] предложен новый подход для решения ПЗ и ОЗ с использованием ПОЛ. ПОЛ состоит в рассмотрении физических полей на суперпозиции векторов (обобщенных лучей), соответствующий всевозможным линиям, которые пересекают рассматриваемую область решения задачи. Применение ПОЛ к исследуемым проблемам означает трансформацию УЧП и граничных значений в семейство обычных дифференциальных уравнений (ОДУ) с соответствующими граничными условиями. Трансформация использует классические прямое преобразование Радона (ППР) и обратное преобразование Радона (ОПР) [13] - [15]. ПОЛ приводит к Методу Обобщенных Лучей (МОЛ), который дает явные аналитические решения рассмотренных проблем и быстрые алгоритмы для вычислений.

Разработаны две версии МОЛ: тау-версия и р-версия, которые имеют разные схемы трансформации УЧП в ОДУ. Тау-версия использует известные в физике варианты уравнений, которые описывают распределение характеристик поля на прямой линии, или трансформацию УЧП в ОДУ чисто математической подстановкой с параметризацией Радона соответствующей прямой линии. Р-версия основана на непосредственном применении ППР к соответствующим УЧП. Для ПЗ применимы обе версии МОЛ, для ОЗ применяется тау-версия.

Анализ явных формул МОЛ демонстрирует ее неустойчивость относительно возмущений исходных данных [3]. Поэтому в численной реализации сконструированных вариантов МОЛ используется регуляризация в самом простом и быстром варианте — рекурсивном сглаживании кубическими сплайнами [16] - [19].

Итак, на базе ПОЛ, построены две версии МОЛ, которые дают явные приближенного решения упомянутых проблем. Построены алгоритмы и реализованы как программный пакет в системе MATLAB, что дает возможность решить проблемы с хорошим качеством и более быстро, чем традиционные методы. Это подтверждается численными примерами, в частности при сравнении с PDE Toolbox MATLAB [11]. Алгоритмы и программный пакет использованы при решении ряда прикладных задач, в частности задач томографии [20] - [25].

Литература:

1. Tijonov A. N., Samarsky A. A. Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1980.
2. Samarsky A. A. Theory of Difference Schemes, Moscow: Nauka, 1977.
3. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Methods for Solving Ill-Posed Problems. Washington: Winston & Sons, 1977.
4. Isakov, V., Inverse Problems for Partial differential Equations, New York: Springer, 1998.
5. Morozov V.A. Regularization Methods for ill-posed problems. London: CRC Press, 1993.
6. Alifanov O. M. Inverse Heat Transfer Problems, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
7. Grebennikov A. Fast Algorithm for Solution of Dirichlet Problem for Laplace Equation. WSEAS TRANSACTION on COMPUTERS Journal, Issue 4, Vol. 2, pp. 1039 -1043 (2003).
8. Grebennikov A. Study of the Approximation Quality of GR-Method for Solution of Dirichlet Problem for Laplace Equation. WSEAS TRANSACTION on MATHEMATICS Journal, Issue 4, Vol. 2, pp. 312 – 317 (2003).



9. Alexandre Grebennikov. A Novel Approach for Solution of Boundary Problems for Differential Equations of Mathematical Physics. WSEAS Transaction on Systems Journal, Issue 4, Vol. 3, pp. 1410-1415, 2004
10. Alexandre Grebennikov. A General Ray (GR) Method for Solution of Differential Equations for Electromagnetic Field. WSEAS Transaction on Communications Journal, Issue 2, Vol. 3, pp. 809-811, 2004.
11. Alexandre Grebennikov, Fast Algorithms and MATLAB Software for Solution of the Dirichlet Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations in Domains with Complicated Geometry. WSEAS Transactions on Mathematics J., Vol. ISS 4, 2008, pp.173-182,
12. Alexandre Grebennikov, Armando Espindola Pozos. Mathematical and Computer Investigation of Heat Conductive Properties of Materials by General Ray Method, Journal of Materials Science and Engineering, Apr. 2010, Volume 4, No.4 (Serial No.29).
13. Radon J. "Über Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integrawerte Langs Gewisser Mannigfaltigkeiten", Leipzig: Berichte Sachsische Academic der Wissenschaften Math.-Phys. Kl., no. 69, pp. 262-267, 1917.
14. Helgason Sigurdur, The Radon Transform, Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 1999.
15. Stanley R. Deans. The Radon Transform and some of its Applications, New-York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
16. Grebennikov A. I. "Spline approximation method for solving some incorrectly posed problems", Doclady Akad. Nauk SSSR, vol. 298, no. 3, pp. 533-537, 1988.
17. Grebennikov A. I. "Spline approximation method for restoring functions", Sov. J. Numer. Anal. Mathem. Modelling, vol. 4, no. 4, pp. 1-15, 1989.
18. Grebennikov A. I. Spline Approximation Method and its Applications. Moscow: MAX Press, 2004.
19. Morozov V. A., Grebennikov A. I. Methods for solution of ill posed problems: algorithmic aspects. Moscow: University Pres, 2005.
20. Grebennikov Alexandre. New Electric Tomography Scheme and Algorithms for Fast Recognition of Compound Structures. MRS on line Proceedings: 2011 IMRC Meeting - Symposium S3 – Structural and Chemical Characterization of Metal Alloys and Compounds, Volume 1372, (7 pages), Cambridge University Press, 2012.
21. Grebennikov Alexandre. New Mathematical Model and Measurement Scheme of Electrical Tomography and Its Fast Resolution by General Ray Method, Progress In Electromagnetics Research Symposium, August 2012, PIERS Proceedings, Published by the Electromagnetics Academy, Cambridge, pp. 256 - 259, ISSN: 1559-9450
22. Grebennikov Alexandre. General Ray Method for Solution of Direct and Inverse Problems of Electromagnetism, Progress In Electromagnetics Research Symposium, August 2012, PIERS Proceedings, Published by the Electromagnetics Academy, Cambridge, pp. 412 - 415, ISSN: 1559-9450.
23. Grebennikov A. I. Identification of thermo-conductive structures of micro scale by general ray method. *Thermal Processes in Engineering Journal*, Publishing House "Sciences and Technologies" Ltd., Russia, 2013, V. 5, No 8, pp. 361 – 369.
24. Grebennikov Alexandre. Reconstruction Image of Discrete Structure of Materials by Projective Computer Tomography. *Advanced Materials Research J.*, Vol. 739 , pp. 106-110. Trans Tech Publications, Switzerland, 2013.
25. Grebennikov Alexandre. Explicit fast and stable method for solution of some coefficient inverse problems for partial differential equations and applications. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. Volume 1, Issue 2 (2013), pp. 92-101.