УДК 514

Аналитическое решение задачи о расположении точки в треугольнике

Гарбарук Виктор Владимирович, кандидат технических наук, доцент;
Терентьева Ульяна Викторовна, студент
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

Аннотация. *Задание по математике, включающее аналитическое решение задач начертательной геометрии, повышает уровень знаний студентов по указанным дисциплинам. Подробно рассмотрены несколько способов определения положения точки относительно треугольника на плоскости. Решение задачи различными методами расширяет методические возможности преподавателя при изложении разделов аналитической геометрии и линейной алгебры, а также обучает студента навыкам выбора оптимального способа решения конкретной задач.*

Ключевые слова: *методология обучения; линейная алгебра; аналитическая геометрия; начертательная геометрия; треугольник.*

В статье [1] была представлена структура задания по математике, включающего аналитическое решение задач начертательной геометрии. Такое задание повышает уровень знаний студентов по указанным дисциплинам и обучает навыкам выбора оптимального способа решения подобных задач. При решении задачи пересечения прямой линии и пирамиды сначала находится точка пересечения прямой с плоскостью одной из граней. Затем надо определить расположение точки на плоскости относительно этой грани. При этом в треугольной пирамиде известны координаты вершин, а прямая задана двумя точками. Задача тривиальная для графических методов, оказывается достаточно сложной для студентов при аналитическом решении. Параметры предлагаемых студентам задач выбраны так, чтобы проекции граней пирамиды на плоскость xOy были невырожденными, т. е. отличались от отрезков. Тогда для решения задачи достаточно определить лежит ли проекция точки на горизонтальную плоскость внутри проекции грани пирамиды на ту же плоскость.

Рассмотрим следующую задачу. На плоскости задан треугольник ABC с вершинами $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $(x_C; y_C)$. Известны также координаты x_M, y_M точки M, не совпадающей с точками A, B, C. Требуется определить положение точки относительно треугольника Такая задача иногда присутствует учебниках по аналитической геометрии [2], но стороны треугольника в ней задаются уравнениями прямых. В статье приведены различные способы решения сформулированной задачи, что расширяет методические возможности преподавателя при изложении различных тем аналитической геометрии и линейной алгебры. Решение одной задачи различными методами поможет студенту освоить взаимные связи между объектами этих дисциплин. Кроме того, задача определения положения точки относительно треугольника актуальна в компьтерной графике при обработке изображений (например, при удалении невидимых линий [3]), в геоинформатике при распознавании объектов, в задачах интерполяции функции двух переменных и других областях науки [4].

Способ I. При $0 < \alpha < 1$ уравнение отрезка AB задается системой

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha(x_B - x_A); \\ y = y_A + \alpha(y_B - y_A). \end{cases}$$

При $\beta > 0$ уравнение луча CM имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_C + \beta(x_M - x_C); \\ y = y_C + \beta(y_M - y_C). \end{cases}$$

Исключая координаты $(x; y)$ точки пересечения отрезка и луча E (рис. 1), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_A + \alpha(x_B - x_A) = x_C + \beta(x_M - x_C); \\ y_A + \alpha(y_B - y_A) = y_C + \beta(y_M - y_C) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_C - x_M) = x_C - x_A; \\ \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_C - y_M) = y_C - y_A. \end{cases}$$

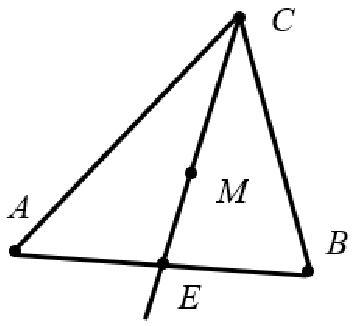

Рис. 1. **Точка пересечения отрезка и луча**

Решение системы:
$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} x_C-x_A & x_C-x_M \\ y_C-y_A & y_C-y_M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_M \\ y_B-y_A & y_C-y_M \end{vmatrix}};\ \beta=\frac{\begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_A \\ y_B-y_A & y_C-y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_M \\ y_B-y_A & y_C-y_M \end{vmatrix}}.$$

Точка M расположена внутри треугольника, если $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 1$. Отметим, что знаменатель последней формулы равен нулю, если прямые AB и CM параллельны. В этом случае точка расположена вне треугольника. При $\beta = 1$ (или $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$) точка M лежит на стороне AB (или AC или BC соответсвенно).

Способ II. Базисным назовем определитель

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(x_B-x_A)(y_B-y_A)-(x_C-x_A)(y_C-y_A).$$

Модуль определителя равен удвоенной площади треугольника ABC. При этом определитель имеет знак «–», если точки A, B, C обходятся по часовой стрелке, и знак «+», если против.

Дополнительные определители $\begin{vmatrix} x_M & x_B & x_C \\ y_M & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_A & x_M & x_C \\ y_A & y_M & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_M \\ y_A & y_B & y_M \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ имеют такой же знак как базисный определитель, если точка M расположена внутри треугольника. В этом случае направление обхода точек не меняется, например, ABC и MBC на рисунке 2. Для положительного базисного определителя на рисунке 2 также показаны знаки дополнительных определителей при различных размещениях точки M.

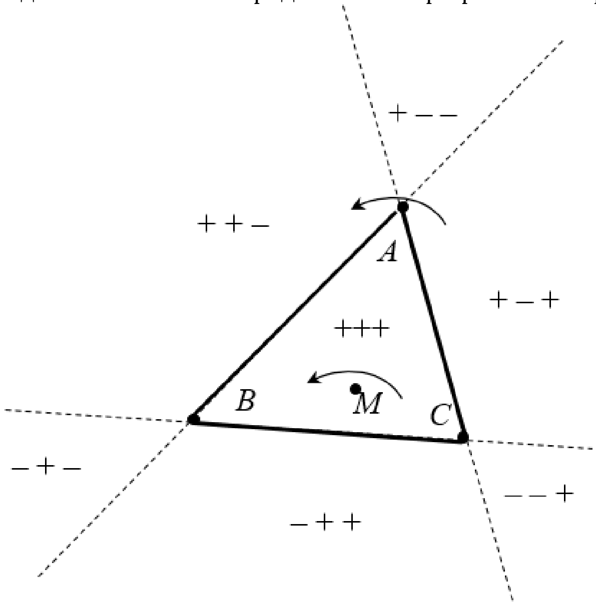

Рис. 2. **Знаки вспомогательных определителей**

Два дополнительных определителя не могут быть равными нулю, т. к. в этом случае совпадут координаты точки M и одной из вершин. При равенстве нулю одного определителя и совпадении знаков двух других точка M расположена на стороне треугольника.

Отметим, что сумма трех вспомогательных определителей равна базисному только в том случае, когда точка E расположена внутри треугольника.

Способ III. Выберем на плоскости два вектора, образующих базис:

$$\bar a=\overline{CA}=\begin{pmatrix} x_A-x_C \\ y_A-y_C \end{pmatrix},\ \bar b=\overline{CB}=\begin{pmatrix} x_B-x_C \\ y_B-y_C \end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix} x_M-x_C \\ y_M-y_C \end{pmatrix}$ представим их линейной комбинацией (рис. 3):

$$\bar m=\overline{MC}=\begin{pmatrix} x_M-x_C \\ y_M-y_C \end{pmatrix}=\alpha\bar a+\beta\bar b=\alpha\begin{pmatrix} x_A-x_C \\ y_A-y_C \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x_B-x_C \\ y_B-y_C \end{pmatrix}.$$

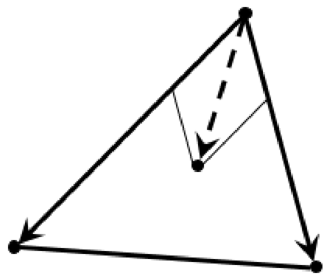

Рис. 3. **Разложение вектора** $\overline{CM}$ **по базису** $\overline{CA}, \overline{CB}$

После решения системы относительно неизвестных α, β получаем

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_M - x_C & x_B - x_C \\ y_M - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A - x_C & x_B - x_C \\ y_A - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_M & x_B & x_C \\ y_M & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}};$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} x_A - x_C & x_M - x_C \\ y_A - y_C & y_M - y_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A - x_C & x_B - x_C \\ y_A - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_A & x_M & x_C \\ y_A & y_M & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Точка М расположена внутри треугольника, если $\begin{cases} 0 < \alpha < 1; \\ 0 < \beta < 1; \\ \alpha + \beta < 1. \end{cases}$ Точка принадлежит стороне треугольника, если в системе присутствует одно равенство. При $\begin{cases} \alpha + \beta = 1; \\ 0 < \alpha < 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \alpha = 0; \\ 0 < \beta < 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \beta = 0; \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ точка М лежит на стороне АВ, или ВС, или АС соответственно. Точка М не должна совпасть ни с одной из вершин, поэтому двух равенств в приведенных системах быть не может.

Способ IV. Введем три вектора $\bar{a} = \overline{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \overline{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ и $\bar{c} = \overline{OC} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$. Рассмотрим разложение вектора $\overline{OM}$ по трем линейно зависимым векторам $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, удовлетворяющим уравнению связи $\alpha + \beta + \gamma = 1$:

$$\bar{m} = \overline{OM} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \alpha\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}.$$

Векторному равенству соответствует система $\begin{cases} \alpha \cdot x_A + \beta \cdot x_B + \gamma \cdot x_C = x_M; \\ \alpha \cdot y_A + \beta \cdot y_B + \gamma \cdot y_C = y_M; \\ \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{cases}$

Главный определитель системы отличен от нуля, т.к. равен площади треугольника S_{ABC}. Система всегда имеет решение, причем единственное.

После вычисления определителей $\begin{vmatrix} x_M & x_B & x_C \\ y_M & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = S_{MBC}$, $\begin{vmatrix} x_A & x_M & x_C \\ y_A & y_M & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = S_{AMC}$, $\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_M \\ y_A & y_B & y_M \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = S_{ABM}$, решение системы имеет вид $\alpha = \frac{S_{MBC}}{S_{ADC}}$, $\beta = \frac{S_{AMC}}{S_{ADC}}$, $\gamma = \frac{S_{ABM}}{S_{ADC}}$. Точка M расположена внутри треугольника, если коэффициенты α, β, γ положительны. Ранее указывалось, что это условие выполняется, если все числители в формулах для α, β, γ имеют одинаковый знак. В отличие от предыдущего это решение равноправно относительно сторон треугольника и симметрично относительно координат вершин. Коэффициенты α, β, γ называются барицентрическими координатами [5]. Они пропорциональны отношению площадей внутрених треугольников (рис. 4), и используются при решении различных задач, например, для интерполяции функции двух переменных [4].

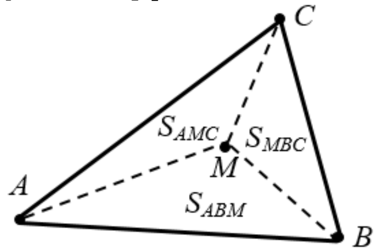

Рис. 4. **Барицентрические координаты**

Пусть функция $f(x; y)$ задана таблично в некоторых точках и на плоскости выбран треугольник ABC, в каждой вершине которого заданы значения функции f_A, f_B, f_C. Интерполяция по трем вершинам треугольника, которому принадлежит некоторая точка M с барицентрическими координатами α, β, γ, осуществляется по формуле $f_M \approx \alpha \cdot f_A + \beta \cdot f_A + \gamma \cdot f_A$. Такая формула используется, например, в компьтерной графике для окраски изображений [3]. Функция $f(x; y)$ при этом задает одну из характеристик цвета в избранных точках.

В заключение отметим, что рассмотренные методы предполагают вычисление трех определителей, в некоторых случаях даже совпадающих. Методы различаются их обоснованием и требуют знания разных разделов аналитической геометрии и линейной алгебры: уравнения прямой и луча на плоскости, свойства определителя, разложение вектора по базису, барицентрические координаты соответственно.

Литература:

1. Гарбарук В. В., Семенов В. А., Тихомиров С. Г. Интеграция графических и аналитических методов решения геометрических задач // Математика в вузе и школе. Труды международной научно-методической конференции. СПб, 2017. С. 33–37.

2. Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие // М.: МАТИ-РГТУ, 2011. 203 с.

3. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование // М.: Изд-во физ.-мат. лит. 2002, 472 с.

4. Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. // М.: Наука, 1987. 160 с.

5. Шкроба С. П. Векторно-координатная геометрия относительно треугольника // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 396 с.