www.esa-conference.ru

О чебышевских конечномерных клиньях в пространстве суммируемых функций

Федоров Владимир Михайлович, доцент кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

В этой статье для замкнутых клиньев $K \subset E$ конечной размерности $\dim(K) = n$ в пространстве $E = L_1(X,\mu)$ суммируемых функций получены необходимые и достаточные условия единственности наилучшего приближения. Такие клинья K обычно называются чебышевскими. Из полученных условий вытекает, что если мера μ не содержит атомов, то пространство $L_1(X,\mu)$ в действительном случае не имеет чебышевских клиньев конечной размерности. В качестве приложения доказываются необходимые и достаточные условия единственности наилучшего приближения клином конечной коразмерности $\dim(K^\circ) = n$ в пространстве $E = C(T)$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте T

Ключевые слова: *чебывшевский клин, полярный* клин, конус, опорный функционал, мера, размерность клина, коразмерность клина, хаусдорфовый компакт.*

On Chebyshev finite-dimensional wedges in the space of summable functions

Fedorov V.M., Associate Professor of the Department of Theory of Functions and Functional Analysis Faculty of Mechanics and Mathematics
Moscow State University M. V. Lomonosov

In this paper, for closed wedges $K \subset E$of finite dimension $\dim(K) = n$ in the space $L_1(X,\mu)$ of summable functions, necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the best approximation are obtained. Such wedges K are usually called Chebyshev wedges. From the conditions obtained it follows that if the measure μ does not contain atoms, then the space $L_1(X,\mu)$ in the real case does not have Chebyshev wedges of finite dimension. As an application, we prove necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the best approximation by a wedge of finite codimension $\dim(K^\circ) = n$ in the space $C(T)$ of continuous functions on a Hausdorff compactum.

Введение

Пусть E обозначает нормированное пространство над полем действительных или комплексных чисел $\mathbb{F}$. Непустое подмножество $K \subset E$ называется *клином*, если $x + y, tx \in K$ при всех $x, y \in K$ и $t \geq 0$. Клин называется *конусом*, если $K \cap (-K) = 0$. Пусть $K^\circ \doteqdot \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re}\alpha(x) \leq 0, x \in K\}$ обозначает *полярный* клин* в сопряженном пространстве E^*. Если клин K является подпространством $L \subset E$ над $\mathbb{R}$, то его *аннулятор** равен $L^\perp \doteqdot \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re}\alpha(x) = 0, x \in K\} = L^\circ$. Обозначим через $S \doteqdot \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ *замкнутый единичный шар* в E и через $\Xi(\alpha) \doteqdot \{x \in S \mid \alpha(x) = \|\alpha\|\}$ – *экстремальное множество* функционала $\alpha \in E^*$. Ненулевой функционал называется *опорным,* если $\Xi(\alpha) \neq \emptyset$ не пусто.

Пусть далее $K \subset E$ обозначает замкнутый клин в банаховом пространстве E. Обозначим через $\hat{E} \doteqdot E/K$ факторпространство смежных классов $\hat{x} = x - K$ в пространстве E и через $\rho(x, K) \doteqdot \|\hat{x}\| = \inf_{y \in K}\|x - y\|$ величину расстояния от точки x до K, которую обычно называют наилучшим приближением элемента x клином K. Клин $K \subset E$ называется *проксиминальным в* E, т.е. обладающим свойством существования наилучшего приближения, если для любого $x \in E$ множество $P_K(x) \doteqdot \{y \in K \mid \|x - y\| = \|\hat{x}\|\}$ не пусто; *получебышевским*, т.е. обладающим свойством единственности наилучшего приближения, если для любого $x \in E$ множество $P_K(x)$ имеет не более одной точки; и *чебышевским*, если для любого $x \in E$ множество $P_K(x)$ состоит ровно из одной точки.

Далее обозначим через $\nabla_p K \doteqdot \operatorname{cone}(K - p)$ *опорный клин* в точке $p \in K$, т.е. коническую оболочку множества $K - p$; обозначим через $\Pi_p K \doteqdot \nabla_p K \cap (-\nabla_p K)$ *опорная плоскость* в точке $p \in K$, т.е. наибольшее действительное линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_p K$; и, наконец, обозначаем через $\nabla_p^\circ K \doteqdot (\nabla_p K)^\circ$ *полярный* клин* опорного клина $\nabla_p K$ в точке $p \in K$.

Основные результаты

Известные ранее результаты в основном относились к задаче характеристики чебышевских подпространств конечной размерности и конечной коразмерности. (см. [1−12]). Нашей задачей является нахождение характеристики чебышевских клиньев конечной размерности в пространстве суммируемых функций.

Пусть $L_1(X,\mu)$ обозначает пространство суммируемых функций относительно неотрицательной σ-аддитивной и σ-конечной меры μ, определенной на σ-алгебре измеримых множеств в пространстве X, а $L_\infty(X,\mu)$ обозначает пространство существенно ограниченных функций, являющееся сопряженным к $L_1(X,\mu)$. Как обычно, мы отождествляем линейные функционалы на $L_1(X,\mu)$ и функции из $L_\infty(X,\mu)$ по формуле $\alpha(f) = \int_X f\alpha\, d\mu$. Измеримые множества и функции в этих пространствах определяются с точностью до множества меры нуль.

Вначале мы докажем необходимые и достаточные условия единственности наилучшего приближения клином K в нормированном пространстве E.

Теорема 1. *Замкнутый клин $K \subset E$ в нормированном пространстве E тогда только тогда обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда для любой точки $p \in K$ и для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ пересечение $\big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K = 0$ равно нулю.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и $\|\alpha\| = 1$. Допустим, что множество $\Xi(\alpha)$ имеет две различные точки $x, y \in \Xi(\alpha)$, т.ч. $z = x - y \in \Pi_p K$. В силу его выпуклости $x - tz \in \Xi(\alpha)$ при всех $0 \le t \le 1$. Поэтому $\|x - tz\| = 1$ и $\|x - v\| \ge \mathrm{Re}\alpha(x - v) = \mathrm{Re}\alpha(x) - \mathrm{Re}\alpha(v) \ge \mathrm{Re}\alpha(x) = 1$ при всех $v \in \nabla_p K$, т.е. норма $\|x - tz\| = \rho\big(x, \nabla_p K\big) = 1$ равна расстоянию от точки x до $\nabla_p K$. Отсюда мы имеем равенство $\|(x + p) - (p + tz)\| = \rho(x + p, K) = 1$ при всех $0 \le t \le 1$. Поскольку $p + tz \in K$ при достаточно малых t > 0, то клин K не обладает свойством единственности наилучшего приближения.

Достаточность. Если клин K не обладает свойством единственности, то в силу выпуклости существуют $x \in E$, $p \in K$ и $z \in \nabla_p K \setminus 0$, т.ч. при всех $-1 \le t \le 1$ получим $\|x - (p + tz)\| = \rho(x, K) = 1$, где $p + tz \in K$. Поскольку $\Pi_p K$ образует крайнее множество клина $\nabla_p K$, то $z \in \Pi_p K$. Полагая $y_t = x - p - tz$, мы имеем $\|y_0\| = \rho\big(y_0, \nabla_p K\big) = \rho(x, K) = 1$. По теореме отделимости выпуклых множеств [13, с. 42] существует $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. $\alpha(y_0) = \|\alpha\| = 1$. Поскольку $\Xi(\alpha)$ является крайним множеством шара S, то $y_t \in \Xi(\alpha)$ при всех $-1 \le t \le 1$. Следовательно, $z \in \big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K$, что противоречит нашему предположению.

Обозначим через $\mathrm{supp}\,(f) \doteqdot \{x \in X | f(x) \ne 0\}$ *носитель* измеримой функции, через $\mathrm{zero}(f) \doteqdot \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ – *множество нулей* измеримой функции, через $\mathrm{subb}(f) \doteqdot \{x \in X |\ |f(x)| < \|f\|_{L_\infty}\}$ – *субноситель* измеримой функции, и, наконец, через $\mathrm{ext}(f) \doteqdot \{x \in X |\ |f(x)| = \|f\|_{L_\infty}\}$ – *экстремальное множество* измеримой функции. Эти множества являются измеримыми.

Лемма 1. *Ненулевой функционал $\alpha \in L_1^*(X, \mu)$ является опорным, тогда и только тогда, когда экстремальное множество* $\mathrm{ext}(\alpha)$ *для соответствующей функции $\alpha \in L_\infty(X, \mu)$ имеет положительную меру* $\mu\big(\mathrm{ext}(\alpha)\big) > 0$.

Доказательство. Если множество $\mathrm{ext}(\alpha)$ положительной меры μ, то функция $f \in L_1(X, \mu)$, т.ч. $\|f\|_{L_1} = 1$, у которой $\mathrm{supp}\,(f) \subset \mathrm{ext}(\alpha)$ и $\mathrm{sign}(f) = \overline{\mathrm{sign}}(\alpha)$, где $\mathrm{sign}(f) \doteqdot f(x)/|f(x)|$ обозначает знак $f(x)$, принадлежит экстремальному множеству $\Xi(\alpha)$. Обратно, предположим, что $\|f\|_{L_1} = 1$ и $\alpha(f) = \|\alpha\|$. Отсюда вытекает равенство $\mathrm{Re} f(x)\alpha(x) = |f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \|\alpha\|_{L_\infty}$ п.в. на носителе $\mathrm{supp}\,(f)$. Поэтому мера множества $\mathrm{ext}(\alpha)$ является положительной.

Теорема 2. *Замкнутый клин $K \subset L_1(X, \mu)$ тогда и только тогда не обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда существует $p \in K$, ненулевая функция $f \in \Pi_p K$ и ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. субноситель* $\mathrm{subb}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(f)$ *и произведение $f(x)\alpha(x) \in \mathbb{R}$ п.в. на X*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что клин не обладает свойством единственности. По теореме 1 существуют точка $p \in K$ и ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. пересечение $\big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K \ne 0$ не равно нулю. Выберем две различные функции f_1, $f_2 \in \Xi(\alpha)$, т.ч. $f \doteqdot (f_1 - f_2)/2 \in \Pi_p K$. В силу выпуклости множества $\Xi(\alpha)$ получаем включение $g \doteqdot (f_1 + f_2)/2 \in \Xi(\alpha)$ и из определения множества $\Xi(\alpha)$ получим $\alpha(g) = \|\alpha\|_{L_\infty}$ и $\alpha(f + g) = \|\alpha\|_{L_\infty}$, при этом нормы $\|g\|_{L_1} = \|f + g\|_{L_1} = 1$. Следовательно, имеют место равенства $\mathrm{Re}\{g(x)\alpha(x)\} = |g(x)|\ \|\alpha\|_{L_\infty}$,$\mathrm{Re}\{\big(f(x) + g(x)\big)\alpha(x)\} = |f(x) + g(x)| \|\alpha\|_{L_\infty}$ п.в. на X и значит $\mathrm{subb}(\alpha) \subset \mathrm{zero}\,g$ и $\mathrm{subb}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(f + g)$ п.в. на X. Откуда имеем $\mathrm{subb}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(f)$. Так как $\mathrm{Im}\{g(x)\alpha(x)\} = \mathrm{Im}\{\big(f(x) + g(x)\big)\alpha(x)\} = 0$ п.в. на X, то $\mathrm{Im}\{f(x)\alpha(x)\} = 0$ п.в. на X. Поэтому $f(x)\alpha(x) \in \mathbb{R}$ п.в. на X.

Достаточность. Предположим, что $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ ненулевой опорный функционал и $f \in \Pi_p K$ ненулевая функция, т.ч. $f(x)\alpha(x) \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{subb}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(f)$. Можно считать, что $\|\alpha\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_1} = 1$. Тогда, полагая $g(x) = |f(x)|\overline{\alpha(x)}$, получим, $\alpha(g) = \|f\|_{L_1} = 1$ и $|f(x) + g(x)| = \big|f(x)\alpha(x) + |f(x)|\big| = f(x)\alpha(x) + |f(x)|$ на множестве X. Поскольку $\alpha(f) = 0$, то $\|f + g\|_{L_1} = 1$ и $\alpha(f + g) = \alpha(g) = 1$. Таким образом, выполняется включение $f \in \big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K$ и значит в силу теоремы 1 клин K не обладает свойством единственности.

Измеримое множество $A \subset X$ положительной меры называется *атомом*, если для любого измеримого подмножества $B \subset A$, либо $\mu(B) = 0$ либо $\mu(A \setminus B) = 0$. Говорят, что множество *неатомическое*, если оно не содержит атомов.

Лемма 2. *Пусть клин $K \subset L_1(X, \mu)$ имеет размерность* $\dim(K) = n$ *и $p \in K$. Тогда для каждого функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ существует функционал $\beta \in \nabla_p^\circ K$, у которого. субноситель* $\mathrm{subb}(\beta)$ *состоит из всех атомов множества* $\mathrm{subb}(\alpha)$ *и ограничения $\beta|_L = \alpha|_L$совпадают, где $L \doteqdot \mathrm{sp}(K)$ линейная оболочка K.*

Доказательство. Можно считать, что $\|\alpha\|_{L_\infty} = 1$.Пусть $\mathrm{subb}(\alpha) = A \cup B$, где A состоит из атомов, а B неатомическое. Обозначим далее через U замкнутый единичный шар в действительном пространстве $L_\infty(B, \mu)$ и рассмотрим базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ линейной оболочки L. Определим отображение $f : U \to \mathbb{C}^n$ по формуле

$f(u) \doteqdot \{\lambda_k\}_{k=1}^n$, где $\lambda_k \doteqdot \int e_k(x) \left(\frac{1+u(x)}{2}\right) e^{i\arg\alpha(x)} d\mu, k = 1, 2, \cdots, n.$

Поскольку $U \subset L_\infty(B, \mu)$ выпукло, слабо* компактно и f слабо* непрерывное аффинное отображение, то образ $f(U)$ компактное и выпуклое множество в $\mathbb{C}^n$.

Так как множество крайних точек $\mathrm{ex}(U)$ состоит из функций, равных по модулю единице на множестве B, то по теореме Ляпунова ([14; с. 471], [15; с.135]) образ $C \doteqdot f\big(\mathrm{ex}(U)\big)$ является компактным и выпуклым в $\mathbb{C}^n$. Поскольку по теореме Крейна–Мильмана шар U является слабым* замыканием выпуклой оболочки крайних точек [15; с. 85], то $f(U) = f\big(\mathrm{ex}(U)\big) = C$, то существует $u \in \mathrm{ex}(U)$, т.ч. $f(u) = f(|\alpha|)$. Рассмотрим функцию $\beta(x) \doteqdot u(x)\, e^{i\arg\alpha(x)}$ на множестве B и $\beta(x) \doteqdot \alpha(x)$ на множестве A. Тогда $|\beta(x)| = 1$ на множестве В. Отсюда получим $\mathrm{subb}(\beta) = A$ и $\beta(e_k) = \alpha(e_k)$ при $k = 1, 2, \cdots, n$, т.е. $\beta|_L = \alpha|_L$.

Теорема 3. *Замкнутый клин $K \subset T$ размерности* $\dim(K) = n$ *в том и только в том случае не является чебышевским, когда существуют точка $p \in K$, ненулевая функция $f \in \Pi_p K$ и опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. субноситель*

$\mathrm{subb}(\alpha)$ *состоит не более, чем из* $n-1$ *атомов множества нулей* $\mathrm{zero}(f)$, *и, кроме того, произведение* $f(x)\alpha(x) \in \mathbb{R}$ *действительно п.в. на множестве* X.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2 и конечномерности клина. Докажем необходимость. По теореме 2 и лемме 2 существуют ненулевая функция $f \in \Pi_p K$ и ненулевой функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, у которого субноситель $\mathrm{subb}(\alpha)$ состоит из атомов множества $\mathrm{zero}(f)$. Предположим, что $\|\alpha\|_{L_\infty} = 1$ и субноситель $\mathrm{subb}(\alpha)$ содержит n атомов $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathrm{zero}(f)$.

Поскольку измеримая функция $\alpha(x)$ принимает постоянное значение на атоме, то на множестве атомов $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$она определяется последовательностью чисел $a_k = \alpha(A_k)$, где $k = 1, 2, \cdots, n$. Выберем базис $\{e_l\}_{l=1}^n$ линейной оболочки $L \doteqdot \mathrm{sp}(K)$, где $e_n = f$. Обозначим через $c_{lk} = e_l(A_k)$, где $l, k = 1, 2, \cdots, n$. Тогда существует ненулевое решение системы линейных уравнений

$$x_1 c_{l1}\mu(A_1) + x_2 c_{l2}\mu(A_2) + \cdots + x_n c_{ln}\mu(A_n) = 0, l = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Пусть $b_k \doteqdot a_k + \lambda x_k$ при $k = 1, 2, \cdots, n$. Так как $|a_k| < 1$ при всех $k = 1, 2, \cdots, n$, то существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что $|b_k| \le 1$ при всех $k = 1, 2, \cdots, n$ и $|b_s| = 1$ для некоторого индекса s. Полагая $\beta(x) \doteqdot \alpha(x)$ на множестве $X \setminus A$ и $\beta(A_k) \doteqdot b_k$ при $k = 1, 2, \cdots, n$, получим, что субноситель $\mathrm{subb}(\alpha)$ имеет, по крайней мере, на один атом меньше, чем субноситель $\mathrm{subb}(\alpha)$ и $\beta|_L = \alpha|_L$ на L.

Если в субносителе $\mathrm{subb}(\alpha)$ конечное число атомов, то, применяя подобные рассуждения конечное число раз, мы получим функционал, удовлетворяющий условию теоремы. Так как в субносителе $\mathrm{subb}(\alpha)$ атомов не более, чем счетно, то, используя индукцию в случае бесконечного числа атомов, можно построить такую последовательность функционалов $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$, что в субносителе $\mathrm{subb}(\beta_i)$ по крайней мере, на один атом меньше, чем в субносителе $\mathrm{subb}(\beta_{i-1})$, и при этом $\beta_i|_L = \beta_{i-1}|_L$. Так как последовательность $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ будет ограничена по норме в пространстве $L_\infty(X, \mu)$, то имеет слабо* сходящуюся подпоследовательность, предел которой будет удовлетворять условиям теоремы.

Следствие. *Замкнутый клин* $K \subset l_1$ *размерности* $\dim(K) = n$ *в том и только в том случае не является чебышевским, когда найдутся точка* $p \in K$, *ненулевой элемент* $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi_p K$ *и опорный функционал* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \in \nabla_p^\circ K$, *т.ч. его субноситель* $\mathrm{subb}(\alpha)$ *состоит не более, чем из* $n-1$ *точки множества нулей* $\mathrm{zero}(x)$, *и, кроме того, произведение* $x_k\alpha_k \in \mathbb{R}$ *при всех* $k = 1, 2, \cdots$.

Замечание. В частности, в силу теоремы 3, если мера не содержит атомов, то пространство $L_1(X, \mu)$ в действительном случае не имеет чебышевских клиньев конечной размерности. Когда клин является подпространством, из теорема 3 получаем критерий того, чтобы подпространство конечной размерности было чебышевским в $L_1(X, \mu)$. В действительном случае он доказан в [8; p. 647].

Пусть $C(T)$ является пространством непрерывных функций на хаусдорфовом компакте T и $B(T)$ есть пространство ограниченных борелевских функций. Как обычно, в этих пространствах задана чебышевская норма $\|f\|_C \doteqdot \sup_{x\in T}|f(x)|$. Для каждого функционала $\alpha \in C^*(T)$[12; c. 288] по теореме Радона–Никодима [12; c. 194] найдется такая неотрицательная регулярная борелевская мера μ на компакте T, называемая модулем $\mu \doteqdot |\alpha|$, и борелевская функция $\varphi \in L_\infty(T, \mu)$, называемая ее аргументом $\varphi \doteqdot \arg(\alpha)$, для которых выполняются следующие свойства: $\|\alpha\| = \mu(T)$, $|\varphi(x)| = 1$ и $\alpha(f) = \int_T f\varphi\, d\mu$ при всех $f \in C(T)$.

Лемма 3. *Ненулевой функционал* $\alpha \in C^*(T)$ *в том и только в том случае является опорным, когда аргумент* $\varphi \doteqdot \arg(\alpha)$ *представляющей меры* $\mu \doteqdot |\alpha|$ *совпадает п.в.*(μ) *с непрерывной функцией на компакте* T.

Доказательство. Если аргумент $\varphi \doteqdot \arg(\alpha)$ совпадает п.в. с непрерывной функцией $g \in C(T)$, то $\alpha(\bar{g}) = \mu(T) = \|\alpha\|$, т.е функционал является опорным. Обратно, если $\alpha(\bar{g}) = \|\alpha\|$, где функция $g \in C(T)$ удовлетворяет условию $|g(x)| \le 1$, то $\int_T \bar{g}\varphi\, d\mu = \int_T \mathrm{Re}(\bar{g}\varphi)\, d\mu = \mu(T)$. Отсюда $\mathrm{Re}\big(\bar{g}(x)\varphi(x)\big) = 1$ п.в. на T. Так как $|\varphi(x)| = 1$, то получаем $g(x) = \varphi(x)$ п.в. на компакте T.

Теорема 4. *Замкнутый клин* $K \subset C(T)$ *коразмерности* $\dim(K^\circ) = n$ *тогда и только тогда не является чебышевским**, *когда существуют* $\alpha \in K^\circ$, *ненулевой функционал* $\beta \in \Pi_\alpha K^\circ$ *и ненулевая борелевская функция* $g \in B(T)$, *для которой имеет место неравенство* $\mathrm{Re}\gamma(g) \le 0$ *при всех* $\gamma \in \nabla_\alpha K^\circ$, *субноситель* $\mathrm{subb}(g)$ *состоит не более, чем из* $n-1$ *точки множества нулей* $\mathrm{zero}(\beta)$, *и, кроме того, произведение* $g(x)\varphi(x) \in \mathbb{R}$ *действительно на компакте* T, *где* $\varphi \doteqdot \arg(\beta)$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что полярный* клин K° не обладает свойством единственности наилучшего приближения и функционал $\alpha \in C^*(T)$ с представляющей мерой μ и аргументом φ имеет, по крайней мере, два элемента наилучшего приближения. Обозначим через μ_k представляющие меры и через φ_k аргументы базиса линейной оболочки полярного* клина K°. Определим меру по формуле $m \doteqdot \mu + \sum_{k=1}^n \mu_k$. По теореме Радона–Никодима получим $\varphi\, d\mu = e\, dm, \varphi_k d\mu_k = e_k dm$, где $k = 1, 2, \cdots, n$. Тогда функции $\{e_k\}_{k=1}^n \subset L_1(T, \mu)$ образуют в пространстве $L_1(T, m)$ подпространство, которое является линейной оболочкой образа K_1 клина K° при изометрическом изоморфизме. При этом функция e допускает, по крайней мере, два элемента наилучшего приближения клином K_1 в пространстве $L_1(T, m)$.

По теореме 3 существуют точка $p_1 \in K_1$, ненулевая функция $f_1 \in \Pi_{p_1} K_1$ и ненулевой опорный функционал $\alpha_1 \in \nabla_{p_1}^\circ K_1$, у которого субноситель $\mathrm{subb}(\alpha_1)$ состоит не более, чем из $n-1$ атома множества $\mathrm{zero}(f_1)$ и $f_1(x)\alpha_1(x) \in \mathbb{R}$ п.в. Ясно, что при помощи указанного изоморфизма точка p_1 отождествляется с функционалом $\alpha \in K^\circ$, функции f_1 соответствует функционал $\beta \in \Pi_\alpha K^\circ$, а функционалу α_1 соответствует борелевская функция $g \in B(T)$, т.ч. $\mathrm{Re}\gamma(g) \le 0$ при всех $\gamma \in \nabla_\alpha K^\circ$, субноситель $\mathrm{subb}(g)$ состоит не более, чем из $n-1$ точки множества $\mathrm{zero}(\beta)$ и $f_1(x)g(x) \in \mathbb{R}$ п.в. Заметим, что аргумент $\varphi = \mathrm{sign}(f_1)$ функционала β определен с точностью до борелевского множества меры нуль. Если переопределить его на множестве меры нуль подходящим образом, мы получим функцию, которая будет удовлетворять условиям теоремы.

Достаточность. Мы обозначим, как и выше, через μ_k представляющие меры и через φ_k аргументы базиса линейной оболочки полярного* клина K°, а затем положим $m \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k$. Тогда пространство $L_1(T,m)$ изометрически изоморфно подпространству функционалов из $C^*(T)$, у которых представляющие меры абсолютно непрерывны относительно меры m. По теореме Радона–Никодима $\varphi_k d\mu_k = e_k dm$, где $k = 1, 2, \cdots, n$. Функции $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ образуют подпространство в $L_1(T,m)$, которое является линейной оболочкой образа K_1 клина K° при изометрическом изоморфизме. Если клин K_1 не является чебышевским в $L_1(X,m)$, то полярный* клин K° не будет чебышевским в $C^*(T)$. Поскольку борелевская функция $g \in B(T)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4, задает функционал из $\nabla_\alpha^\circ K^\circ$, то достаточность следует из теоремы 3.

Литература:

1. Хавинсон С. Я. О единственности функции наилучшего приближения в метрике пространства L_1. Известия АН СССР, сер. матем. 1958, №22, с. 243–270.

2. Гаркави А. Л. Теория наилучшего приближения в нормированных линейных пространствах, Математический анализ. 1967, Итоги науки. сер. Математика. ВИНИТИ, М., 1969, с. 75–132.

3. Гаркави А. Л. Чебышевские подпространства конечного дефекта пространства суммируемых функций. Ученые записки Орехово-Зуевского педагогического института. 1964, Том XXII, с. 5–11.

4. Гаркави А. Л. Характеристика чебышевских подпространств конечной коразмерности в L_1. Математические заметки. 1970, 7, №2, с. 155–163.

5. Singer I. Cea mai buna aproximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale (Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces). Editura Academiei RSR, Bucuresti, 1967, p. 1–400

6. Singer I. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Springer-Verlag, Berlin. 1970, p. 1–415.

7. Phelps R. R. Uniqueness of Hahn–Banach extention and uniqueness best approximation, Trans. Amer. Math. Soc. 1960, **95, №**2, p. 238–256.

8. Phelps R. R. Cebysev subspaces of finite dimension in L_1. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, **17, №**3, p. 646-652.

9. Phelps R. R. Cebysev subspace of finite codimension in $C(X)$. Paci. J. Math., 1963, **13, №**2, p. 647–655.

10. Федоров В. М. О единственности мажорант линейных функционалов. Вестник МГУ. Матем. Механ. 2005, №5, с. 25–33.

11. Федоров В. М. Аппроксимативные свойства клиньев в пространстве непрерывных функций. К 80-летию В. А. Скворцова. Современные проблемы Математики и механики. 2016, Том XI, выпуск 1, с. 123–142.

12. Федоров В. М. Характеристика чебышевских конусов конечной размерности и конечной коразмерности. Вестник МГУ. Матем. Механ. 2008, №6, с. 9–25.

13. Дэй М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ. 1961, с. 1–232.

14. Ляпунов А. О вполне аддитивных вектор-функциях. Известия АН СССР. 1940, №4, с. 465–478.

15. Рудин У. Функциональный анализ. М.: МИР. 1975, с. 1–443.

15. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы. Часть I. Общая теория. М.: ИЛ. 1962, с. 1–896.